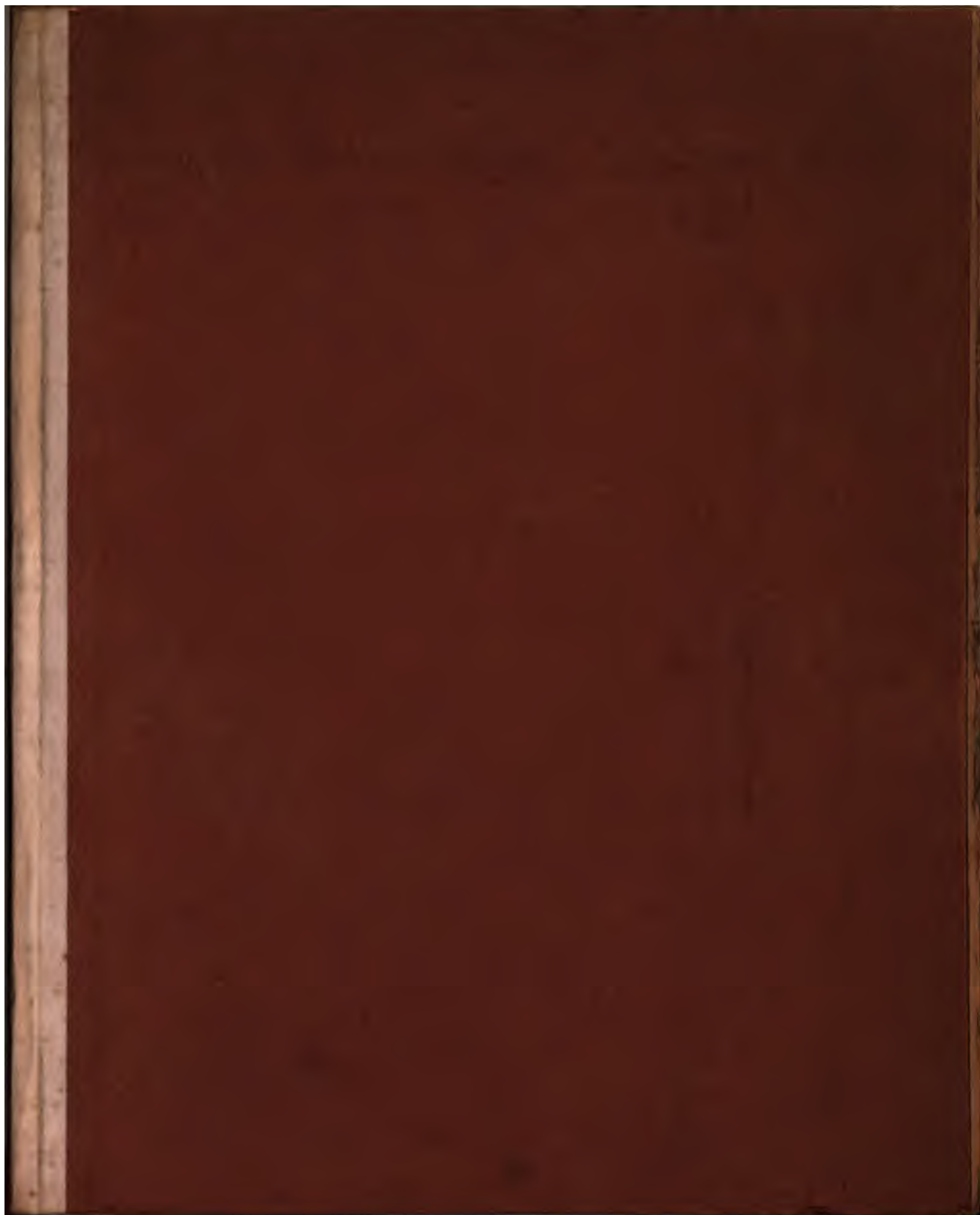



600047063Q



INDBYDELSESSKRIFT

TIL

KJØBENHAVNS UNIVERSITETS FEST

I ANLEDNING AF

HANS MAJESTÆT KONGENS

FØDSELSDAG

den 8de April 1873.

Heri: Integration af lineære Differentialligninger af anden Orden ved Hjælp af Kjædebrøker

af

Adolph Steen.

INDBYDELSESSKRIFT

TIL

KJØBENHAVNS UNIVERSITETS FEST

I ANLEDNING AF

HANS MAJESTÆT KONGENS

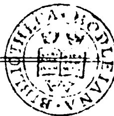
FØDSELSDAG

den 8de April 1873.

Heri: Integration af lineære Differentialligninger af anden Orden ved Hjælp af Kjædebrøker

af

Adolph Steen.



KJØBENHAVN.

Trykt hos J. H. Schultz.

1873.

Integration

af

den lineære Differentialligning

af anden Orden

ved Hjælp af Kjædebrøk

af

Adolph Steen.

Indhold.

§ 1. Problemets almindelige Løsning.

§ 2. Direkte Anvendelser.

12. Fælles Form for Integralerne af (30) og (37).

13. De Besselske Funktioners Anvendelse til Integration af (1) for $P=a$, $Q=bx+c$. Deres Hovedegenskaber beviste ved Differentialligningen og Kjædebrøken.

14. Integration af (1) for $P=a$, $Q=bx+c$, ved bestemte Integraler, naar $\frac{3}{2}>\frac{a}{b}>1$ og $1>\frac{a}{b}>\frac{1}{2}$.

15. Integration af samme Ligning ved bestemte Integraler, naar $\frac{a}{b}=1$.

16. Methoden til Integration af samme Ligning for $\frac{a}{b}$ udenfor Grændserne $\frac{3}{2}$ og $\frac{1}{2}$.

17. Integration af $y=(bx+c)\frac{d^2y}{dx^2}$ ved Kjædebrøk, Række, Besselsk Funktion og bestemt Integral.

18. Kjædebrøken for $P=ax+b$, $Q=fx^2+gx+h$. Integration af

$$y=(ax+b)\frac{dy}{dx}+\left(\left(\frac{1}{r(r+1)}-\frac{a}{r}\right)x^2+gx+h\right)\frac{d^2y}{dx^2} \quad (58)$$

og af samme Ligning for $a=\frac{1}{r+1}$, r positiv hel.

19. Integration af

$$y=\left(\frac{2r-q}{(r-q)(r+1)}x+b\right)\frac{dy}{dx}+\left(-\frac{x^2}{(r-q)(r+1)}+gx+h\right)\frac{d^2y}{dx^2} \quad (67)$$

for positive hele r og q.

20. Kjædebrøken i 18 for $f=a$. Integration af

$$y=\left(\frac{x}{r^2}+b\right)\frac{dy}{dy}+\left(\frac{x^2}{r^2}+gx+h\right)\frac{d^2y}{dx^2} \quad (73),\ r \text{ positiv hel.}$$

21. Kjædebrøken i 18 tillempet for

$$y=(ax+b)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{(ax+b)^2}{ka}+c\right)\frac{d^2y}{dx^2} \quad (75).$$

Integration af

$$r(k+r-1)y=k(x+b)\frac{dy}{dx}+((x+b)^2+c)\frac{d^2y}{dx^2} \quad (77),\ r \text{ positiv hel.}$$

22. Integration af

$$ky=(x+b)\frac{dy}{dx}+((x+b)^2-4c^2)\frac{d^2y}{dx^2} \quad (79).$$

23. Kjædebrøk for $tg.\theta\sqrt{k}$ anvendt til Integration af

$$ky=(x+b)\frac{dy}{dx}-((x+b)^2-4c^2)\frac{d^2y}{dx^2} \quad (82).$$

24. Integration af $ky=2(x+b)\frac{dy}{dx}+((x+b)^2-c^2)\frac{d^2y}{dx^2}$ (84), nemlig ved Kuglefunktionen af første Art, naar $k=r(r+1)$, r positiv hel, ellers altid ved et bestemt Integral.

25. Integration af $ky=3(x+b)\frac{dy}{dx}+((x+b)^2-4c^2)\frac{d^2y}{dx^2}$, (88), k ikke lig -1.

26. Integration af (88) for $k = -1$.

27. Integration af

$$k(k+2q-1)y = 2q(x+b)\frac{dy}{dx} + ((x+b)^2 - 2c^2)\frac{d^2y}{dx^2} \quad (92)$$

og $$k(k+2q)y = (2q+1)(x+b)\frac{dy}{dx} + ((x+b)^2 - 4c^2)\frac{d^2y}{dx^2} \quad (93),$$

idet q er positiv hel, k henholdsvis ikke $-(q-1)$ og $-q$.

28. Integration af (92) for $k = -(q-1)$, af (93) for $k = -q$.

§ 3. Indirekte Anvendelser.

29. Differentialligninger, som efter en Ændring af den uafhængige variable lade sig integrere ved Besselske Funktioner, ligesom (24) i 7.

30. Exempler paa Reduktion til (79) i 22 og (58) i 18.

Side.	Linie.	Trykfejl.	Rettelse.
6	12 f. n.	$P_1 X$	$P_{n-1} X$
8	7 f. o.	$-p-1$ og $-p-2$	$-p+1$ og $-p+2$
11	7 f. n.	$d.(x+a_1)Q_{r-3}$	$\frac{d.(x+a_1)Q_{r-3}}{dx}$
18	6 —	$\varphi(z,a,a)$	$\varphi(z,a,\alpha)$
23	10 f. o.	$(-1)^r$	$(-1)^{r-1}$
24	5 f. n.	$\frac{dy}{dx}$	$a\frac{dy}{dx}$
32	1 f. o.	$J^{-\frac{a}{b}}$	$J^{\frac{a}{b}}$

Forord.

Dette Arbejde er blevet til i Universitetets Tjeneste, fremkaldt under Indsamlingen af Stoffet til Forelæsninger for videre komne i forrige Semester og udarbejdet til Brug for dette, da andet Arbejde for Universitetet nødte *mig* til kun at anvende en enkelt Time om Ugen paa videre komne. Deri søger det sin Berettigelse til at udgives som Universitetsprogram; thi derfor er Fremstillingen saaledes, at det formentlig kan læses af en for mathematiske Arbejder forholdsvis større Kreds, skjønt denne i vort lille Land fra et almindeligt Synspunkt kan være lille nok.

Integration af den lineære Differentialligning af anden Orden ved Kjædebrøk er langt fra noget nyt. Gauss's berømte Afhandling: „disquisitiones circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x + \&c.$“, indeholder næsten alt hvad derom vides, og man kan hos forskjellige andre Forfattere hist og her finde saadanne Integrationer. Men alle fremsættes de som indirekte Resultater af andre Undersøgelser. Derimod er det mig ikke bekjendt, at nogen har behandlet Problemet direkte fra Integralregningens Standpunkt. Jeg har antaget, at en saadan Behandling fortjente et Forsøg, og derfor har jeg først fremstillet den almindelige Lov for Dannelsen af den Kjædebrøk, hvorved enhver saadan lineær Differentialligning bliver integreret, og eftervist, hvilke ganske specielle Undtagelsestilfælde derfra maa opstaa som Gjenstande for særegen Behandling. Til denne almindelige, men meget korte Theori af Problemet har jeg dernæst knyttet en Del Anvendelser, hvorved vel en stor Del be-

kjendte Udviklinger fremstilles ad denne Vej, men ogsaa nogle formentlig nye Resultater, saavelsom nye Former af de bekjendte findes. Jeg haaber derhos i denne lille Monographi at have opnaaet den rationelle Udvikling af Sagen, som jeg altid eftertragter og uden hvilken et saadant Arbejde ikke paa den rette Maade kan bidrage til Udbredelse af mathematiske Kundskaber.

§ 1. Problemets almindelige Løsning.

1. Differentialligningen

$$y = P\frac{dy}{dx} + Q\frac{d^2y}{dx^2} \tag{1}$$

kan altid faa sit ene partikulære Integral udtrykt ved en Kjædebrøk, der dog i de fleste Tilfælde bliver uendelig og altsaa kun kan bruges til Integralets Bestemmelse, hvis den er konvergent. Man finder nemlig ved Differentiation af (1)

$$\frac{dy}{dx} = P_1\frac{d^2y}{dx^2} + Q_1\frac{d^3y}{dx^3},$$

idet

$$P_1 = \frac{P + \frac{dQ}{dx}}{1 - \frac{dP}{dx}}, \quad Q_1 = \frac{Q}{1 - \frac{dP}{dx}},$$

og fortsatte Differentiationer give en Række Differentialligninger af Formen

$$\frac{d^ry}{dx^r} = P_r\frac{d^{r+1}y}{dx^{r+1}} + Q_r\frac{d^{r+2}y}{dx^{r+1}}, \tag{2}$$

hvor

$$P_r = \frac{P_{r-1} + \frac{dQ_{r-1}}{dx}}{1 - \frac{dP_{r-1}}{dx}}, \quad Q_r = \frac{Q_{r-1}}{1 - \frac{dP_{r-1}}{dx}}. \tag{3}$$

og $r = 1, 2, 3 \ldots$. Men (1) og Rækken af Ligningerne (2) give paa sædvanlig Maade Kjædebrøken

$$\frac{y}{\frac{dy}{dx}} = P + \frac{Q}{P_1 +} \frac{Q_1}{P_2 +} \frac{Q_2}{P_3 + \ldots}, \tag{4}$$

saa at man kan sætte

$$\frac{dy}{dx} - Xy = 0, \quad \text{idet } X = \frac{1}{P +} \frac{Q}{P_1 +} \frac{Q_1}{P_2 + \ldots} \tag{5}$$

betegner Værdien af den sidste Kjædebrøk, hvis den er konvergent.

Derved kommer man til det partikulære Integral

$$y_1 = c_1 e^{\int X dx}$$

og dernæst i Følge en bekjendt Regel til det fuldstændige Integral

$$y = e^{\int X dx} \left[c_1 + c_2 \int e^{-\int \left(2X + \frac{P}{Q}\right) dx} dx \right]. \tag{6}$$

En nærliggende Prøve paa denne Methode kan gjøres paa de lineære Differentialligninger af anden Orden med P og Q konstante og med $P = ax$, $Q = bx^2$. I disse Tilfælde faas henholdsvis, idet m er konstant,

$$X = m \text{ og } X = \frac{m}{x},$$

altsaa ogsaa henholdsvis de bekjendte $y_1 = c_1 e^{mx}$ og $y_1 = c_1 x^m$.

2. Saafremt Integrationen af (1) ved Hjælp af (5) er mulig, vil ogsaa den af (2) ved Substitutionen

$$\frac{d^r y}{dx^r} = z$$

dannede lineære Differentialligning af anden Orden

$$z = P_r \frac{dz}{dx} + Q_r \frac{d^2 z}{dx^2} \tag{7}$$

kunne integreres. Dertil behøves nemlig blot Beregning af Kjædebrøken

$$X_r = \frac{1}{P_r +} \frac{Q_r}{P_{r+1} +} \frac{Q_{r+1}}{P_{r+2} + \ldots},$$

som er saaledes forbunden med X, at

$$X = \cfrac{1}{P + \cfrac{Q}{P_1 + \cfrac{Q_1}{P_2 + \ddots \cfrac{Q_{r-2}}{P_{r-1} + Q_{r-2} X_r}}}}.$$

Heraf findes nemlig først

$$\cfrac{Q}{P_1 + \cfrac{Q_1}{P_2 + \ddots \cfrac{Q_{r-2}}{P_{r-1} + Q_{r-1} X_r}}} = -P + \frac{1}{X},$$

dernæst

$$\cfrac{Q_1}{P_2 + \ddots \cfrac{Q_{r-2}}{P_{r-1} + Q_{r-1} X_r}} = -P_1 + \cfrac{Q}{-P + \cfrac{1}{X}} \text{ o.s.v.,}$$

og tilsidst

$$X_r = \frac{1}{Q_{r-1}} \left(-P_{r-1} + \cfrac{Q_{r-2}}{-P_{r-2} + \cfrac{Q_{r-3}}{-P_{r-3} + \ddots \cfrac{Q}{-P + \cfrac{1}{X}}}} \right). \tag{8}$$

Det fuldstændige Integral af (7) bliver af Formen (6), dog at X, P, Q faa Index r.*)

---

*) Heraf følger, at

$$\frac{d^r . e^{\int X dx}}{dx^r} = e^{\int X_r dx}.$$

Men for $r = 1$ har man altsaa

$$\frac{d . e^{\int X dx}}{dx} = e^{\int X dx} X = e^{\int X_1 dx},$$

følgelig ved at differentiere Logarithmen af begge Sider

$$X X_1 = \frac{dX}{dx} + X^2.$$

3. Formlerne (3) for P_r og Q_r føre til en særlig Betragtning af det Tilfælde, hvor man for nogen Værdi af r har

$$\frac{d\,P_{r-1}}{d\,x} = 1\,, \quad P_{r-1} = x + a_1. \tag{9}$$

Undersøges nemlig Kjædebrøken (4) eller (5) fra Leddet $\frac{Q_{r-1}}{P_r}$, idet for P_r og Q_r indføres Udtrykkene (3), saa findes

$$\frac{Q_{r-1}}{P_r +}\,\frac{Q_r}{P_{r+1} + \ldots} = \frac{Q_{r-1}\left(1 - \frac{d\,P_{r-1}}{d\,x}\right)}{P_{r-1} + \frac{d\,Q_{r-1}}{d\,x} + \frac{Q_{r-1}}{P_{r+1} + \ldots}}.$$

Paa lignende Maade

$$\frac{d^2.\,e^{\int X dx}}{d\,x^2} = \frac{d.\,e^{\int X_1 dx}}{d\,x} = e^{\int X_1 dx}\,X_1 = e^{\int X_2 dx}$$

samt

$$X_1\,X_2 = \frac{d\,X_1}{d\,x} + X_1^2 \text{ o. s. v.}$$

Almindelig faas

$$e^{\int X_r dx} = e^{\int X dx}\,X\,X_1\,X_2\,..\,X_{r-1},$$

hvilket finder Anvendelse ved de homogene Differentialligningers Reduktion til lavere Orden. Anvendt paa den lineære Differentialligning af $n$te Orden giver det

$$X\,X_1\,X_2\ldots X_{n-1} + P_1\,X\,X_1\ldots X_{n-2} + \ldots + P_1\,X + P_n = 0,$$

som for konstante Værdier af Koefficienterne giver konstante X, og for $P_r = \frac{a_r}{x^r}$ giver $X_r = \frac{m-r}{x}$, saa at de bekjendte Integrationer endnu kunne bevises paa en ny Maade. Undertiden synes ogsaa i andre Tilfælde Bestemmelsen af Funktionerne X, X_1 o. s. v. mulig, som f. Ex. i

$$\frac{d^2\,y}{d\,x^2} - \frac{d\,y}{d\,x} - \frac{2\,(x+1)}{(1-2\,x)^2}\,y = 0;$$

thi $y = e^{\int X dx}$ giver

$$X(X_1 - 1) = \frac{2\,(x+1)}{(1-2\,x)^2},$$

som tilfredsstilles af

$$X = \frac{1}{1-2\,x}, \quad X_1 = \frac{3}{1-2\,x},$$

altsaa

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-2\,x}}.$$

For Værdien (9) af P_{r-1} bliver denne Del af Kjædebrøken nul i Tælleren, saa at hele Kjædebrøken (4) eller (5) kommer til at ende med Leddet $\frac{Q_{r-2}}{P_{r-1}}$, med mindre tillige

$$P_{r-1} + \frac{d\,Q_{r-1}}{d\,x} = 0, \tag{10}$$

da man faaer $P_r = \frac{0}{0}$, altsaa P_{r+1} ogsaa ubestemt og dermed hele Kjædebrøken ubestemt. I dette Tilfælde kræves der en nøjere Undersøgelse af de Differentialligninger (2), som have tjent til Kjædebrøkens Dannelse.

4. Antages (9) og (10) gjældende, saa er

$$P_{r-1} = x + a_1, \quad Q_{r-1} = -\left(\frac{1}{2}(x+a_1)^2 + a_2\right),$$

og man kommer til

$$\frac{d^{r-1}y}{dx^{r-1}} = (x+a_1)\frac{d^r y}{d\,x^r} - \left(\frac{1}{2}(x+a_1)^2 + a_2\right)\frac{d^{r+1}y}{dx^{r+1}}, \tag{11}$$

som ved en ny Differentiation giver

$$-\left(\frac{1}{2}(x+a_1)^2 + a_2\right)\frac{d^{r+2}y}{d\,x^{r+2}} = 0.$$

Heraf udledes

$$\frac{d^{r+2}y}{d\,x^{r+2}} = 0, \quad \frac{d^{r+1}y}{d\,x^{r+1}} = c_1, \quad \frac{d^r y}{d\,x^r} = c_1\,x + c_2, \tag{12}$$

men den videre Bestemmelse saavel af y's Differentialkoefficienter som af y selv maa ske ved (2) og (1). Disse Ligninger dannes i dette Tilfælde ved Integration af (11), idet man begynder med delvis Integration af det sidste Led. Derved faaes

$$\frac{d^{r-2}y}{d\,x^{r-2}} = 2\int(x+a_1)\frac{d^r y}{dx^r}\,d\,x - \left(\frac{1}{2}(x+a_1)^2 + a_2\right)\frac{d^r y}{dx^r},$$

og en ny delvis Integration giver

$$3\,\frac{d^{r-2}y}{d\,x^{r-2}} = 2\,(x+a_1)\frac{d^{r-1}y}{d\,x^{r-1}} - \left(\frac{1}{2}(x+a_1)^2 + a_2\right)\frac{d^r y}{d\,x^r}.$$

Denne Ligning behandlet paa samme Maade fører til

$$6\frac{d^{r-3}y}{dx^{r-3}} = 3(x+a_1)\frac{d^{r-2}y}{dx^{r-2}} - \left(\frac{1}{2}(x+a_1)^2 + a_2\right)\frac{d^{r-1}y}{dx^{r-r}} \text{ o. s. v.}$$

Man ser let, at de Koefficienter, der komme paa Ligningens venstre Side, dannes ved Addition af Tallene i den naturlige Talrække, medens der paa højre Side i første Led vil findes selve Tallene i denne Talrække, altsaa i Almindelighed

$$\frac{1}{2}p(p+1)\frac{d^{r-p}y}{dx^{r-p}} = p(x+a_1)\frac{d^{r-p-1}y}{dx^{r-p-1}} - \left(\frac{1}{2}(x+a_1)^2 + a_2\right)\frac{d^{r-p+2}y}{dx^{r-p-2}}.$$

$p = r$ giver den Differentialligning af Formen (1), hvis Integration søges, nemlig for positive hele r

$$y = \frac{2}{r+1}(x+a_1)\frac{dy}{dx} - \frac{2}{r(r+1)}\left(\frac{1}{2}(x+a_1)^2 + a_2\right)\frac{d^2y}{dx^2}. \quad (13)$$

Man kan nu først ved Indførelse af de to sidste (12) i (11) finde $\frac{d^{r-1}y}{dx^{r-1}}$ og derfra efterhaanden komme til Værdierne af Differentialkoefficienterne af stedse lavere Orden, indtil man er naaet til $\frac{dy}{dx}$ og $\frac{d^2y}{dx^2}$, hvis Værdier indsatte i (13) give for y en hel algebraisk rational Funktion i x af Graden $r+1$. Ordnet efter Potenser af $x+a_1$ med aftagende Exponenter kan den skrives

$$y = c_1(x+a_1)^{r+1} + c_2(x+a_1)^r + A_1(x+a_1)^{r-1} + A_2(x+a_1)^{r-2} + \ldots + A_r,$$

hvor $A_1, A_2 \ldots A_r$ kunne findes af (13) ved de ubestemte Koefficienters Methode.

Men Anvendelse af Kjædebrøken (5) vil dels føre lettere til Maalet, dels give et almindeligere Resultat. Differentiationen af (11) har nemlig vist, at den sande Værdi saavel af P_r, som af P_{r+1} maa være nul, medens $Q_r = Q_{r+1}$ ikke er nul, altsaa

$$\frac{Q_{r-1}}{P_r + \frac{Q_r}{P_{r+1} \cdot \cdot}} = 0,$$

saa at Kjædebrøken ender med Leddet $\frac{Q_{r-2}}{P_{r-1}}$. I Følge det udviklede har man

$$P = \frac{2}{r+1}(x+a_1), \quad Q = -\frac{2}{r(r+1)}\left(\frac{1}{2}(x+a_1)^2 + a_2\right),$$

$$P_1 = \frac{2}{r}(x+a_1), \qquad Q_1 = -\frac{2}{(r-1)r}\left(\frac{1}{2}(x+a_1)^2 + a_2\right) \text{ o. s. v.,}$$

$$P_{r-2} = \frac{2}{3}(x+a_1), \quad Q_{r-2} = -\frac{2}{2.3}\left(\frac{1}{2}(x+a_1)^2 + a_2\right),$$

$$P_{r-1} = x + a_1.$$

Den r leddede Kjædebrøk bliver

$$X = \cfrac{1}{\cfrac{2}{r+1}(x+a_1) - \cfrac{\frac{2}{r(r+1)}\left(\frac{1}{2}(x+a_1)^2+a_2\right)}{\cfrac{2}{r}(x+a_1) - \ddots - \cfrac{\frac{2}{2.3}\left(\frac{1}{2}(x+a_1)^2+a_2\right)}{x+a_1}}}$$

eller efter bekjendte Ændringer

$$X = \cfrac{r+1}{2(x+a_1) - \cfrac{(x+a_1)^2+2a_2}{2(x+a_1) - \cfrac{(x+a_1)^2+2a_2}{2(x+a_1) - \ddots \cfrac{(x+a_1)^2+2a_2}{2(x+a_1)}}}}.$$

Antog man, at r ikke var hel, vilde dog den samme Kjædebrøk fortsat i det uendelige opstaa. Sætter man i saa Tilfælde

$$X = \frac{r+1}{z}, \quad \text{altsaa } z = 2(x+a_1) - \frac{(x+a_1)^2+2a_2}{z},$$

saa findes z og deraf igjen

$$X = \frac{r+1}{x+a_1 \pm \sqrt{-2a_2}},$$

saa at det partikulære Integral bliver

$$y_1 = c_1 (x + a_1 \pm \sqrt{-2a_2})^{r+1}.$$

Rigtigheden heraf prøves let ved Substitution i (13), hvis højre Side med Udeladelse af c_1 bliver

$$2(x+a_1)(x+a_1\pm\sqrt{-2a_2})^r-((x+a_1)^2+2a_2)(x+a_1\pm\sqrt{-2a_2})^{r-1}$$
$$=(x+a\pm\sqrt{-2a_2})^{r-1}[2(x+a_1)^2\pm 2(x+a_1)\sqrt{-2a_2}-(x+a_1)^2-2a_2],$$

som uden Vanskelighed ændres til det i y indeholdte Udtryk. Da Prøven er udført med begge Fortegn for Rodtegnet, har man to af hinanden uafhængige partikulære Integraler, ligesom man ogsaa ved (6) finder, at det andet partikulære Integral udledt af ovenstaaende bliver

$$y_2=c_2(x+a_1\mp\sqrt{-2a_2})^{r+1}.$$

Endelig viser Prøven, at Integrationen gjælder uden Indskrænkning med Hensyn til Beskaffenheden af r; dog erindres, at $r=0$ og $r=-1$ kræve, at (13) sættes under hel Form med Hensyn til r, og at man for $r=-1$ maa faa Logarithmen istedenfor den $(r+1)^{te}$ Potens som det ene partikulære Integral, medens det andet bliver konstant. Da imidlertid Integralet for $r=-1$ simpelt og fuldstændigt er udtrykt ved

$$y=c_1\,arc\left(tg=\frac{x+a_1}{\sqrt{2a}}\right)+c_2,$$

er det rigtigst at undtage dette Tilfælde fra de andre. Heraf følger altsaa, at

Differentialligningen

$$k(k+1)y=2k(x+a_1)\frac{dy}{dx}-((x+a_1)^2+2a_2)\frac{d^2y}{dx^2} \qquad (14)$$

for alle Værdier af k, undtagen $k=-1$, har det fuldstændige Integral

$$y=c_1(x+a_1+\sqrt{-2a_2})^{k+1}+c_2(x+a_1-\sqrt{-2a_2})^{k+1}. \qquad (15)$$

5. Antages dernæst (9), men ikke (10) gjældende, saa at Kjædebrøken (5) ender med Leddet $\frac{Q_{r-2}}{P_{r-1}}$, saa vil Indførelsen af Kjædebrøkens Værdi i (6) reducere Problemet til Kvadratur.

For at komme til Formen af de lineære Differentialligninger af anden Orden, som saaledes blive integrable, søges efterhaanden P_{r-2}, P_{r-3} o. s. v., idet man gaar ud fra (9) og (3) eller

$$P_{r-1} = x + a_1 = \frac{P_{r-2} + \frac{d\,Q_{r-2}}{d\,x}}{1 - \frac{d\,P_{r-2}}{d\,x}}.$$

Man faar heraf

$$\frac{d\,P_{r-2}}{d\,x} + \frac{1}{x+a_1}\,P_{r-2} = 1 - \frac{1}{x+a_1}\,\frac{d\,Q_{r-2}}{d\,x},$$

altsaa

$$P_{r-2} = \frac{\frac{1}{2}(x+a_1)^2 + a_2 - Q_{r-2}}{x+a_1} = \frac{P_{r-3} + \frac{d\,Q_{r-3}}{d\,x}}{1 - \frac{d\,P_{r-3}}{d\,x}}$$

eller, naar Udtrykket for Q_{r-2} (jfr. (3)) indsættes og Ligningen ordnes,

$$\frac{d\,P_{r-3}}{d\,x} + \frac{x+a_1}{\frac{1}{2}(x+a_1)^2+a_2}\,P_{r-3} = 1 - \frac{x+a_1}{\frac{1}{2}(x+a_1)^2+a_2}\,\frac{d\,Q_{r-3}}{d\,x} - \frac{Q_{r-3}}{\frac{1}{2}(x+a_1)^2+a_2},$$

som igjen kan skrives saaledes

$$\frac{d\,P_{r-3}}{d\,x} + \frac{x+a_1}{\frac{1}{2}(x+a_1)^2+a_2}\,P_{r-3} = 1 - \frac{d\,.\,(x+a_1)\,Q_{r-3}}{\frac{1}{2}(x+a_1)^2+a_2}.$$

Integrationen heraf giver

$$P_{r-3} = \frac{\frac{1}{[3]}(x+a_1)^3 + a_2(x+a_1) + a_3 - (x+a_1)\,Q_{r-3}}{\frac{1}{2}(x+a_1)^2+a_2} = \frac{P_{r-4} + \frac{d\,Q_{r-4}}{d\,x}}{1 - \frac{d\,P_{r-4}}{d\,x}},$$

og deraf faar man paa lignende Maade

$$P_{r-4} = \frac{\frac{1}{[4]}(x+a_1)^4 + \frac{1}{[2]}a_2(x+a_1)^2 + a_3(x+a_1) + a_4 - \left(\frac{1}{2}(x+a_1)^2+a_2\right)Q_{r-4}}{\frac{1}{[3]}(x+a_1)^3 + a_2(x+a_1) + a_3} \quad \text{o. s. v.}$$

Sætter man for Kortheds Skyld

$$\frac{1}{[p]}(x+a_1)^p + \frac{1}{[p-2]}a_2(x+a_1)^{p-2} + \frac{1}{[p-3]}a_3(x+a_1)^{p-3} + \ldots + a_p = \mathbf{X}_p,$$

saa vil man almindelig have, hvad det almindelige Induktionsbevis let vil godtgjøre,

$$P_{r-p} = \frac{X_p - X_{p-2}\, Q_{r-p}}{X_{p-1}},$$

og tilsidst

$$P = \frac{X_r - X_{r-2}\, Q}{X_{r-1}}.$$

De simpleste Tilfælde af denne Art ere følgende:

a) $r = 1$, $y = (x+a)\frac{dy}{dx} + Q\frac{d^2y}{dx^2}$, $X = \frac{1}{x+a}$,

$$y = (x+a)\left(c_1 + c_2 \int \frac{e^{-\int \frac{x+a}{Q} dx}}{(x+a)^2}\, dx\right);$$

b) $r = 2$, $$y = \frac{\frac{1}{2}(x+a_1)^2 + a_2 - Q}{x+a_1}\frac{dy}{dx} + Q\frac{d^2y}{dx^2}, \quad P_1 = x + a_1,$$

$$X = \frac{1}{P + \frac{Q}{P_1}} = \frac{x+a_1}{\frac{1}{2}(x+a_1)^2 + a_2},$$

$$y = \left(\frac{1}{2}(x+a_1)^2 + a_2\right)\left(c_1 + c_2 \int \frac{e^{-\int \frac{\frac{1}{2}(x+a_1)^2 + a_2 - Q}{(x+a_1)Q} dx}}{\left(\frac{1}{2}(x+a_1)^2 + a_2\right)^2}\, dx\right)$$

Allerede for $r = 3$ bliver det besværligt at danne Udtrykket for X; men dette behøves heller ikke, da man umiddelbart ved Prøve kan overbevise sig om, at $y = X_r$ er et partikulært Integral i den almindelige Ligning. Altsaa

Differentialligningen

$$y = \frac{X_r - X_{r-2}\, Q}{X_{r-1}}\frac{dy}{dx} + Q\frac{d^2y}{dx^2}, \tag{16}$$

hvor man for hele positive r har

$$X_r = \frac{1}{[r]}(x+a_1)^r + \frac{1}{[r-2]}a_2(x+a_1)^{r-2} + \frac{1}{[r-3]}a_3(x+a_1)^{r-3} + \ldots + a_r,$$

integreres fuldstændig ved

$$y = X_r \left(c_1 + c_2 \int \frac{e^{-\int \frac{X_r - X_{r-2} Q}{X_{r-1} Q} dx}}{X_r^2} dx \right). \qquad (17)$$

Det ligger i det udviklede, at denne Klasse Differentialligninger, ligesom (13), ogsaa kan integreres efter r Differentiationer. Saaledes vil

$$y = (x+a) \frac{dy}{dx} + Q \frac{d^2y}{dx^2}$$

strax ved første Differentiation give

$$0 = (x+a) \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dQ}{dx} \frac{d^2y}{dx^2} + Q \frac{d^3y}{dx^3},$$

hvoraf først

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{c_1}{Q} \; e^{-\int \frac{x+a}{Q} dx},$$

dernæst

$$\frac{dy}{dx} = c_1 \int \frac{e^{-\int \frac{x+a}{Q} dx}}{Q} dx + c_2$$

og endelig

$$y = c_1 (x+a) \int \frac{e^{-\int \frac{x+a}{Q} dx}}{Q} dx + c_2 (x+a) + c_1 e^{-\int \frac{x+a}{Q} dx},$$

som ogsaa kan udledes af det ovenfor fundne ved delvis Integration. Ligeledes af

$$y = \left(\frac{1}{2} (x + a_1) + \frac{a_2 - Q}{x + a_1} \right) \frac{dy}{dx} + Q \frac{d^2y}{dx^2}$$

faas ved Differentiation og Reduktion

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{(x+a_1) \frac{dQ}{dx} + a_2 - Q}{(x+a_1)^2} \right) \frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{2} (x+a_1) + \frac{a_2 - Q}{x+a_1} + \frac{dQ}{dx} \right) \frac{d^2y}{dx^2} + Q \frac{d^3y}{dx^3},$$

som igjen kan modtage den til $r = 1$ svarende Form

$$\frac{dy}{dx} = (x+a_1) \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Q (x+a_1)^2}{\frac{1}{2} (x+a_1)^2 + (x+a_1) \frac{dQ}{dx} + a_2 - Q} \frac{d^3y}{dx^3} \text{ o. s. v.}$$

---

§ 2. Direkte Anvendelser.

6. Kjædebrøken (5), som i Almindelighed er Funktion af de to givne Funktioner P og Q, vil blive simplere, naar en af disse bliver konstant.

Antager man saaledes

$$Q = c,$$

idet c er konstant, saa afhænger Kjædebrøken alene af P. Men for hvilketsomhelst P lader sig dog næppe nogen Integration udføre ad denne Vej. Derfor tages her

$$P = ax + b,$$

hvoraf følger

$$P_1 = \frac{ax+b}{1-a}, \quad Q_1 = \frac{c}{1-a},$$

$$P_2 = \frac{ax+b}{1-2a}, \quad Q_2 = \frac{c}{1-2a}$$

og almindelig

$$P_r = \frac{ax+b}{1-ra}, \quad Q_r = \frac{c}{1-ra}.$$

Saaledes er Integrationen af Differentialligningen

$$y = (ax+b)\frac{dy}{dx} + c\frac{d^2y}{dx^2} \tag{18}$$

gjort afhængig af Kjædebrøken

$$X = \cfrac{1}{ax+b+\cfrac{(1-a)c}{ax+b+\cfrac{(1-2a)c}{ax+b+\cfrac{(1-3a)c}{ax+b+\dots}}}} \tag{19}$$

Naar ingen af Tællerne heri bliver nul, er Kjædebrøken uendelig, men af tvivlsom Konvergens. Er nemlig a positiv, ende Leddene med at være negative med stedse numerisk voxende Tællere. Er a negativ og $x > \frac{b}{-a}$, vil Konvergensbetingelsen (jfr. Schlömilch: Handbuch der math. Analysis. Jena 1845)

$$Lim \frac{(ax+b)^2}{(1-ra)c} > 0$$

for voxende r ikke være opfyldt; Grænsen bliver nul og det er da uafgjort, om der er Konvergens eller ej.

Kjædebrøken (19) kan altsaa ikke føre til Integrationen af (18), uden naar den er endelig, idet en af Tællerne bliver nul. Hvis saaledes for positive hele r

$$1 - ra = 0\,,\quad a = \frac{1}{r}\,,$$

faar man

$$X = \cfrac{r}{x + rb + \cfrac{(r-1)\,rc}{x + rb + \cfrac{(r-2)\,rc}{x + rb + \ddots \cfrac{2rc}{x + rb + \cfrac{rc}{x + rb}}}}}\,, \tag{20}$$

tjenlig til Integration af

$$ry = (x + rb)\frac{dy}{dx} + rc\frac{d^2y}{dx^2}. \tag{21}$$

Imidlertid behandles ogsaa denne Ligning let ved gjentagen Differentiation, idet man finder strax

$$(r-1)\frac{dy}{dx} = (x + rb)\frac{d^2y}{dx^2} + rc\frac{d^3y}{dx^3}\,,$$

og efter r Gjentagelser

$$0 = (x + rb)\frac{d^{r+1}y}{dx^{r+1}} + rc\frac{d^{r+2}y}{dx^{r+2}}.$$

Den sidste Ligning giver

$$\frac{d^{r+1}y}{dx^{r+1}} = c_1 e^{-\frac{(x+rb)^2}{2rc}}\,,$$

altsaa

$$\frac{d^ry}{dx^r} = c_1 \int e^{-\frac{(x+rb)^2}{2rc}} dx + c_2.$$

Vel faas heraf det fuldstændige Integral

$$y = c_1 \int^{r+1} e^{-\frac{(x+rb)^2}{2rc}} dx^{r+1} + c_2 \int^r dx^r\,,$$

men da Konstanterne ved de sidste r Integrationer ikke ere bestemte, vil

denne Formel ikke være synderlig praktisk. Derimod kan man benytte Rækken af Differentialligninger af (21) til uden Integration at komme op til Udtrykket for y eller til hvert af de to partikulære Integraler for sig. Saaledes for det sidstes vedkommende, der bliver et Polynominm i x af r^{te} Grad, naar man gaar ud fra

$$\frac{d^{r+1}y_2}{dx^{r+1}} = 0,\ \frac{d^r y_2}{dx^r} = c_2\,,$$

findes efterhaanden

$$\frac{d^{r-1}y_2}{dx^{r-1}} = c_2\,(x + rb)\,,$$

$$\frac{d^{r-2}y_2}{dx^{r-2}} = \frac{c_2}{[2]}\,((x+rb)^2 + rc)\,,$$

$$\frac{d^{r-3}y_2}{dx^{r-3}} = \frac{c_2}{[3]}\,((x+rb)^3 + 3rc\,(x+rb))\,,$$

$$\frac{d^{r-4}y_2}{dx^{r-4}} = \frac{c_2}{[4]}\,((x+rb)^4 + 6rc\,(x+rb)^2 + 3r^2c^2) \text{ o. s. v.}$$

Ved disse Udtryks Fortsættelse til $\dfrac{d^{r-7}y}{dx^{r-7}}$ er Loven for Koefficienterne funden og prøvet at blive som i nedenstaaende almindelige Udtryk

$$\xi_p = (x+rb)^p + 1.C_{p,2}rc\,(x+rb)^{p-2} + 1.3.C_{p,4}r^2c^2\,(x+rb)^{p-4} + \ldots$$
$$\ldots + 1.3.5\ldots(2q-1)\,C_{p,2q}\,r^q c^q\,(x+rb)^{p-2q} + \ldots\ldots,$$

idet der ved $C_{p,2q}$ forstaas Antallet af Kombinationer af p Elementer til $2q < p$ og Rækken standser af sig selv med første eller nul^{te} Potens af $x + rb$, eftersom p er ulige eller lige. Man har da

$$\frac{d^{r-p}y_2}{dx^{r-p}} = \frac{c_2}{[p]}\,\xi_p\,,$$

følgelig for $p = r$

$$y_2 = \frac{c_2}{[r]}\,\xi_r.$$

Paa lignende Maade dannes det andet partikulære Integral af (21) ved at gaa ud fra

$$\frac{d^{r+1}y_1}{dx^{r+1}} = c_1 e^{-\frac{(x+rb)^2}{2rc}} \quad \text{og} \quad \frac{d^r y}{dx^r} = c_1 \int e^{-\frac{(x+rb)^2}{2rc}} dx.$$

Man faar deraf først

$$\frac{d^{r-1}y_1}{dx^{r-1}} = c_1 \left(\xi_1 \int e^{-\frac{(x+rb)^2}{2rc}} dx + \xi_0 \, rce^{-\frac{(x+rb)^2}{2rc}} \right),$$

dernæst

$$\frac{d^{r-2}y_1}{dx^{r-2}} = \frac{c_1}{[2]} \left(\xi_2 \int e^{-\frac{(x+rb)^2}{2rc}} dx + \xi_1 \, rce^{-\frac{(x+rb)^2}{2rc}} \right)$$

og almindelig

$$\frac{d^{r-p}y_1}{dx^{r-p}} = \frac{c_1}{[p]} \left(\xi_p \int e^{-\frac{(x+rb)^2}{2rc}} dx + \xi_{p-1} rc\, e^{-\frac{(x+rb)^2}{2rc}} \right).$$

Det andet partikulære Integral er altsaa

$$y_1 = \frac{c_1}{[r]} \left(\xi_r \int e^{-\frac{(x+rb)^2}{2rc}} dx + \xi_{r-1} rc\, e^{-\frac{x+rb}{2rc}} \right).$$

Sætter man

$$\frac{d^{r-p}y}{dx^{r-p}} = z,$$

ser man, at med en lille Forandring i de arbitrære Konstanter

Differentialligningen

$$pz = (x + rb)\frac{dz}{dx} + rc\frac{d^2z}{dx^2}, \tag{22}$$

hvor p og r ere hele positive Tal, $p < r$, har det fuldstændige Integral

$$z = c_1 \left(\xi_p \int e^{-\frac{(x+rb)^2}{2rc}} dx + \xi_{p-1} rce^{-\frac{(x+rb)^2}{2rc}} \right) + c_2 \xi_p, \tag{23}$$

ξ_p bestemt som ovenfor.

7. Betragtes nu Tilfældet

$$P = a,$$

hvor a er konstant, maa man ogsaa strax tage specielle Q, simplest

$$Q = bx + c.$$

Man finder

$$P_1 = a + b, \qquad Q_1 = bx + c \text{ o. s. v.}$$
$$P_r = a + rb, \qquad Q_r = bx + c,$$

saa at Integrationen af

$$y = a\frac{dy}{dx} + (bx + c)\frac{d^2y}{dx^2} \tag{24}$$

afhænger af Kjædebrøken

$$X = \frac{1}{a +} \frac{bx + c}{a + b} + \frac{bx + c}{a + 2b} + \frac{bx + c}{a + 3b} + \cdots \tag{25}$$

Ved Hjælp af en Udvikling, analog med den af Legendre (jfr. Anm. til élémens de géom.), forvandles denne Kjædebrøk til en konvergent Række. Sættes nemlig

$$\varphi(z, a, \alpha) = 1 + \frac{a}{z} + \frac{1}{2}\frac{a^2}{z(z+\alpha)} + \frac{1}{2.3}\frac{a^3}{z(z+\alpha)(z+2\alpha)} + \ldots,$$

faar man

$$\frac{a\alpha}{z}\frac{\varphi(z+\alpha, a, \alpha)}{\varphi(z, a, \alpha)} = \frac{a\alpha}{z +} \frac{a\alpha}{z+\alpha +} \frac{a\alpha}{z + 2\alpha} + \ldots$$

Indføres

$$z = a, \quad \alpha = b, \quad a = \frac{bx+c}{b},$$

finder man for $(bx + c)X$ (jfr. (25))

$$\frac{bx+c}{a}\,\frac{\varphi\left(a+b, \frac{bx+c}{b}, b\right)}{\varphi\left(a, \frac{bx+c}{b}, b\right)} =$$

$$\frac{bx+c}{a} \cdot \frac{1 + \frac{bx+c}{b(a+b)} + \frac{1}{2}\frac{(bx+c)^2}{b^2(a+b)(a+2b)} + \frac{1}{2.3}\frac{(bx+c)^3}{b^3(a+b)(a+2b)(a+3b)}\ldots\ldots}{1 + \frac{bx+c}{ba} + \frac{1}{2}\frac{(bx+c)^2}{b^2 a(a+b)} + \frac{1}{2.3}\frac{(bx+c)^3}{b^3 a(a+b)(a+2b)}\ldots\ldots}$$

Men saa bliver

$$X = \frac{1}{a} \frac{\varphi\left(a+b, \frac{bx+c}{b}, b\right)}{\varphi\left(a, \frac{bx+c}{b}, b\right)} = \frac{d.}{dx} l. \left(a + \frac{bx+c}{b} + \frac{1}{2} \frac{(bx+c)^2}{b^2(a+b)} + \frac{1}{2.3} \frac{(bx+c)^3}{b^3(a+b)(a+2b)} \cdots\right),$$

og (24) faar det partikulære Integral

$$y = c_1 \left(a + \frac{bx+c}{b} + \frac{1}{2} \frac{(bx+c)^2}{b^2(a+b)} + \frac{1}{2.3} \frac{(bx+c)^3}{b^3(a+b)(a+2b)} + \cdots\right), \quad (26)$$

hvilken Række er konvergent for alle x.

8. Undertiden kan (24) integreres under endelig Form, idet Kjædebrøken udtrykkes ved bekjendte Funktioner. Saaledes hvis $b = 2a$, faas af (25)

$$X = \frac{1}{a + \frac{2ax+c}{3a + \frac{2ax+c}{5a + \frac{2ax+c}{7a + \ddots}}}},$$

som let beregnes ved Hjælp af den bekjendte Kjædebrøk

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{x}{1 + \frac{x^2}{3 + \frac{x^2}{5 + \frac{x^2}{7 + \cdots}}}}$$

Sættes nemlig heri $\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}$ for x, faas efter bekjendte Ændringer

$$\frac{e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}} - e^{-\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}}{e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}} + e^{-\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}} = \frac{\sqrt{2ax+c}}{a + \frac{2ax+c}{3a + \frac{2ax+c}{5a + \cdots}}}$$

Altsaa bliver

$$X = \frac{1}{\sqrt{2ax+c}} \frac{e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}} - e^{-\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}}{e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}} + e^{-\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}},$$

hvoraf igjen let (6) beregnes. Man vil se, at det ene partikulære Integral bliver

$$y = c_1\left(e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}} + e^{-\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}\right)$$

og i det andet indgaar

$$\int \frac{e^{-\int\frac{a\,dx}{2ax+c}}}{\left(e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}} + e^{-\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}\right)^2}dx = \int \frac{(2ax+c)^{-\frac{1}{2}}dx}{\left(e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}} + e^{-\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}\right)^2},$$

som ved Substitutionen $z = e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}$ bliver til

$$\int \frac{dz}{z\left(z+\frac{1}{z}\right)^2} = \int \frac{z\,dz}{(z^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{z^2+1} = -\frac{1}{2}\frac{z^{-1}}{z+z^{-1}}.$$

Man ser da, at det andet partikulære Integral er $e^{-\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}$ og at Differentialligningen

$$y = a\frac{dy}{dx} + (2ax+c)\frac{d^2y}{dx^2} \tag{27}$$

er fuldstændig integreret ved

$$y = c_1\,e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}} + c_2\,e^{-\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}. \tag{28}$$

$c = 0$ giver, idet a's Fortegn tilføjes, for Ligningen

$$y = \pm a\frac{dy}{dx} \pm 2ax\frac{d^2y}{dx^2}$$

henholdsvis

$$y = c_1 e^{\sqrt{\frac{2x}{a}}} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{2x}{a}}}$$

og

$$y = c_1 \cos\sqrt{\frac{2x}{a}} + c_2 \sin\sqrt{\frac{2x}{a}}.$$

Dette Resultat kunde iøvrigt ogsaa faas ved den Fremgangsmaade, som jeg har vist at kunne bruges for lineære Differentialligninger, hvis partikulære Integraler alle ere af samme Form (jfr. Oversigt over det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger 1866 p. 77).

I Tilfældene $c=0$ og $a=\pm 1$ har Glaisher (Rep. of the Brit. Association 1871. Edinburgh. notices and abstracts, p. 14 & 16) angivet som partikulært Integral henholdsvis

$$y_1 = c_1 \left(e^{\sqrt{2x}} + e^{-\sqrt{2x}}\right) \text{ og } y_1 = c_1 \cos\sqrt{2x}.$$

Den hele Række af Differentialligninger, som kunne dannes af (27) ved gjentagne Differentiationer og Substitutioner af Formen

$$\frac{d^r y}{dx^r} = y^{(r)} \tag{29}$$

og som almindelig med hele positive r blive

$$y^{(r)} = (2r+1)\, a \frac{dy^{(r)}}{dx} + (2ax+c)\frac{d^2 y^{(r)}}{dx^2}, \tag{30}$$

ville nu være integrerede, naar man i (29) indsætter Udtrykket (28) for y. Som specielt Tilfælde heraf udhæves, hvad der faas for $r=1$, nemlig at Differentialligningen

$$y' = 3a\frac{dy'}{dx} + (2ax+c)\frac{d^2y'}{dx^2} \tag{31}$$

har det fuldstændige Integral

$$y' = \frac{c_1 e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}} + c_2 e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}}{\sqrt{2ax+c}}. \tag{32}$$

Denne Ligning hører ogsaa til dem, som kunne integreres ved Methoden i Oversigt over det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger 1866.

Det til (31) svarende partikulære Integral, som udledes af Kjædebrøken, faas ifølge 2, idet (8) giver

$$X_1 = \frac{1}{2ax+c}\left(-a + \frac{1}{X}\right) = \cfrac{1}{3a + \cfrac{2ax+c}{5a + \cfrac{2ax+c}{7a + \cdots}}}$$

Da det første Udtryk for X_1 giver

$$X_1 = -\frac{a}{2ax+c} + \frac{1}{\sqrt{2ax+c}}\,\frac{e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}} + e^{-\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}}{e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}} - e^{-\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}},$$

ser man, dels at denne Funktion kan udtrykkes ved ovenstaaende Kjædebrøk, dels at det partikulære Integral af (31) bliver

$$y_1 = c_1 \frac{e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}} - e^{-\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}}{\sqrt{2ax+c}}.$$

Beregningen af det fuldstændige Integral (32) heraf frembyder ingen Vanskelighed.

9. Integrationen af (30) for et hvilketsomhelst helt positivt r giver et temmelig sammensat, men ret interessant partikulært Integral, naar man i (29) sætter

$$y = e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}.$$

Man finder efterhaanden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}}{(2ax+c)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}}{(2ax+c)^{\frac{3}{2}}}\left((2ax+c)^{\frac{1}{2}} - a\right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}}{(2ax+c)^{\frac{5}{2}}}\left(2ax+c-3a(2ax+c)^{\frac{1}{2}}+3a^2\right),$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}}{(2ax+c)^{\frac{7}{2}}}\left((2ax+c)^{\frac{3}{2}} - 6a(2ax+c) + 15a^2(2ax+c)^{\frac{1}{2}} - 15a^3\right) \text{ o. s. v.}$$

Loven for Exponenterne i disse Udtryk er iøjnefaldende, men den Lov, hvorefter Koefficienterne dannes, er vanskeligere at se; de næste Rækker af Koefficienter findes at være

i $\frac{d^5y}{dx^5}$ 1, 10, 45, 105, 105,

i $\frac{d^6y}{dx^6}$ 1, 15, 105, 420, 945, 945,

i $\frac{d^7y}{dx^7}$ 1, 21, 210, 1260, 4725, 10395, 10395,

hvilke dog ikke alle have været nødvendige til Opdagelsen af Loven. Ved Sammenligning med Tallene i den Pascalske Trekant, ser man, at dennes første skraa Række danner de første Koefficienter, den tredie (multipliceret med 1) danner de næste, den femte multipliceret med 1.3 giver de følgende; den syvende maa multipliceres med 1.3.5, for at give den fjerde Række af Koefficienter o. s. v. I Følge heraf vil det Polynomium i $(2ax+c)^{\frac{1}{2}}$ af Graden $r-1$, som vil indgaa i $\frac{d^r y}{dx^r}$, blive

$$\varphi_{r-1}(\sqrt{2ax+c})=(2ax+c)^{\frac{r-1}{2}}-1.C_{r,2}a(2ax+c)^{\frac{r-2}{2}}+1.3.C_{r+1,4}a^2(2ax+c)^{\frac{r-3}{2}}-$$
$$1.3.5\,C_{r+2,6}a^3(2ax+c)^{\frac{r-4}{2}}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots(-1)^p 1.3.5\ldots(2p-1)\,C_{r+p-1,\,2p}a^p(2ax+c)^{\frac{r-p-1}{2}}\ldots+(-1)^r 1.3.5\ldots(2r-3)a^{r-1},$$

hvis Rigtighed bekræftes ved det almindelige Induktionsbevis. Sætter man nu

$$f_r(\sqrt{2ax+c})=\frac{\varphi_{r-1}(\sqrt{2ax+c})}{(2ax+c)^{\frac{2r-1}{2}}},$$

bliver

$$y_1^{(r)}=c_1 f_r(\sqrt{2ax+c})\,e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}$$

det ene partikulære Integral af (30). Det andet findes, naar man i (29) sætter

$$y=e^{-\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}},$$

og i Følge hele Beregningens Natur kan det deraf fundne alene ved Fortegnet for $\sqrt{2ax+c}$ være forskjelligt fra det ovenfor angivne. Man vil da se, at

Differentialligningen

$$y=(2r+1)a\frac{dy}{dx}+(2ax+c)\frac{d^2y}{dx^2}, \qquad (30)$$

hvor r er positiv hel, har det fuldstændige Integral

$$y=c_1 f_r(\sqrt{2ax+c})\,e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}+c_2 f_r(-\sqrt{2ax+c})e^{-\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}. \qquad (33)$$

$r=0$ og $r=1$ i (30) og (33) frembringe igjen henholdsvis (27) og (28), samt (31) og (32).

10. Har man dernæst i (24) $b=-2a$ og, af Hensyn til senere Sammenstillinger, $-c$ for c, følgelig

$$X=\cfrac{1}{a-\cfrac{2ax+c}{-a-\cfrac{2ax+c}{-3a-\cfrac{2ax+c}{-5a\ldots}}}}=\cfrac{1}{a+\cfrac{2ax+c}{a-\cfrac{2ax+c}{3a-\cfrac{2ax+c}{5a\ldots}}}},$$

saa kan denne Kjædebrøk findes ved Hjælp af det bekjendte

$$tg\,x=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7\ldots}}}},$$

idet man heri indfører $\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}$ for x, hvorved findes

$$tg\frac{\sqrt{2ax+c}}{a}=\cfrac{\frac{\sqrt{2ax+c}}{a}}{1-\cfrac{2ax+c}{3a-\cfrac{2ax+c}{5a\ldots}}}$$

Følgelig bliver

$$X=\frac{1}{a+\sqrt{2ax+c}\,tg\frac{\sqrt{2ax+c}}{a}}=\frac{\cos\frac{\sqrt{2ax+c}}{a}}{a\cos\frac{\sqrt{2ax+c}}{a}+\sqrt{2ax+c}\,\sin\frac{\sqrt{2ax+c}}{a}}.$$

Da Tælleren heri er Differentialkoefficienten af Nævneren, saa faar Ligningen

$$y=\frac{dy}{dx}-(2ax+c)\frac{d^2y}{dx^2} \qquad (34)$$

det partikulære Integral

$$y_1=c_1\left(a\cos\frac{\sqrt{2ax+c}}{a}+\sqrt{2ax+c}\,\sin\frac{\sqrt{2ax+c}}{a}\right).$$

Beregningen af det fuldstændige Integral ved (6) er besværligere end følgende Udledning af (28).

Dersom man integrerer (27), faas først

$$\int y dx = ay + \int (2ax+c)\frac{d^2y}{dx^2}dx$$

og dernæst ved delvis Integration af det sidste Led

$$\int y dx = -ay + (2ax+c)\frac{dy}{dx}.$$

Sætter man $\int y dx = y_1$ og forandrer a og c til $-a$ og $-c$, bliver denne Ligning til (34), nemlig

$$y_1 = a\frac{dy_1}{dx} - (2ax+c)\frac{d^2y_1}{dx^2}.$$

Dennes partikulære Integraler findes altsaa af (28) ved Forandring af Fortegnene foran a og c og Integration. Man finder

$$\int e^{\mp\frac{1}{a}\sqrt{-2ax-c}}dx = e^{\mp\frac{1}{a}\sqrt{-2ax-c}}(\pm\sqrt{-2ax-c}+a)$$

$$= a\cos\frac{\sqrt{2ax+c}}{a} + \sqrt{2ax+c}\,\sin\frac{\sqrt{2ax+c}}{a} \pm \sqrt{-1}\left(\sqrt{2ax+c}\,\cos\frac{\sqrt{2ax+c}}{a} - a\sin\frac{\sqrt{2ax+c}}{a}\right),$$

altsaa

Differentialligningen

$$y = a\frac{dy}{dx} - (2ax+c)\frac{d^2y}{dx^2} \qquad (34)$$

har det fuldstændige Integral

$$y = c_1\left(a\cos\frac{\sqrt{2ax+c}}{a} + \sqrt{2ax+c}\,\sin\frac{\sqrt{2ax+c}}{a}\right) + c_2\left(\sqrt{2ax+c}\,\cos\frac{\sqrt{2ax+c}}{a} - a\sin\frac{\sqrt{2ax+c}}{a}\right). \qquad (35)$$

11. Fortsættes Integrationen af (27) r Gange, kommer man til

$$\int^r y dx^r = -(2r-1)a\int^{r-1} y dx^{r-1} + (2ax+c)\int^{r-2} y dx^{r-2},$$

eller med Betegnelsen

$$\int^r y dx^r = y_r \qquad (36)$$

til

$$y_r = -(2r-1)a\frac{dy_r}{dx} + (2ax+c)\frac{d^2y_r}{dx^2},$$

hvis fuldstændige Integral udledes af (28) formedelst (36).

Indsættes i (36) blot

$$y=e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}},$$

faas for $r=1$

$$y_1=\int y dx=e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}(\sqrt{2ax+c}-a)=e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}\varphi_1(\sqrt{2ax+c}),$$

for $r=2$

$$y_2=\int\int y dx^2=e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}(2ax+c-3a\sqrt{2ax+c}+3a^2)=e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}\varphi_2(\sqrt{2ax+c})\text{ o.s.v.}$$

Sammenholdt med Formlerne i 9 giver den sidste Ligning

$$\int\int y dx^2=e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}\varphi_2(\sqrt{2ax+c})=(2ax+c)^{\frac{5}{2}}\frac{d^3y}{dx^3},$$

og deraf faas igjen

$$\int\int\int y dx^3=(2ax+c)^{\frac{5}{2}}\frac{d^2y}{dx^2}-5a\int(2ax+c)^{\frac{3}{2}}\frac{d^2y}{dx^2}dx,$$

og formedelst

$$(2ax+c)^{\frac{3}{2}}\frac{d^2y}{dx^2}=e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}\varphi_1(\sqrt{2ax+c})=\int y\,dx$$

bliver det

$$\int\int\int y\,dx^3=(2ax+c)^{\frac{5}{2}}\frac{d^2y}{dx^2}-5a\int\int y\,dx^2$$

$$=(2ax+c)^{\frac{5}{2}}\left(\frac{d^2y}{dx^2}-5a\frac{d^3y}{dx^3}\right).$$

Indføres endelig heri Udtrykkene for $\frac{d^2y}{dx^2}$ og $\frac{d^3y}{dx^3}$ i 9, faas

$$\int\int\int y\,dx^3=e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}\varphi_3(\sqrt{2ax+c})=(2ax+c)^{\frac{7}{2}}\frac{d^4y}{dx^4}\text{ o. s. v.}$$

Almindelig vil man af

$$\int^{r-1} y\,dx^{r-1}=(2ax+c)^{\frac{2r-1}{2}}\frac{d^ry}{dx^r}$$

finde

$$\int^r y\,dx^r = (2ax+c)^{\frac{2r-1}{2}} \frac{d^{r-1}y}{dx^{r-1}} - (2r-1)a \int (2ax+c)^{\frac{2r-3}{2}} \frac{d^{r-1}y}{dx^{r-1}}\,dx$$

eller

$$\int^r y\,dx^r = (2ax+c)^{\frac{2r-1}{2}} \frac{d^{r-1}y}{dx^{r-1}} - (2r-1)a \int^{r-1} y\,dx^{r-1}$$

$$= (2ax+c)^{\frac{2r-1}{2}} \left(\frac{d^{r-1}y}{dx^{r-1}} - (2r-1)a \frac{d^r y}{dx^r} \right).$$

Indsættes heri Udtrykkene for Differentialkoefficienterne i 9, faar man det almindelige Led at være

$$(-1)^p 1.3.5...(2p-1)\, a^p (2ax+c)^{\frac{r-p}{2}} e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}} \left[C_{r+p-2,2p} + \frac{2r-1}{2p-1} C_{r+p-2,2p-2} \right],$$

hvor Størrelsen indenfor Parenthesen er

$$C_{r+p-2,\,2p-2} \left(\frac{(r-p)(r-p+1)}{(2p-1)\,2p} + \frac{2r-1}{2p-1} \right) = C_{r+p,\,2p},$$

altsaa det samme Led, som faas ved i det almindelige Led af $e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}\,\varphi_{r-1}(\sqrt{2ax+c})$ at forandre r til $r+1$. Følgelig har man

$$\int^r y\,dx^r = e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}\,\varphi_r(\sqrt{2ax+c}) = (2ax+c)^{\frac{2r+1}{2}} \frac{d^{r+1}y}{dx^{r+1}}.$$

Behandles

$$y = e^{-\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}$$

paa samme Maade, kommer man til

$$\int^r y\,dx^r = e^{-\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}\,\varphi_r(-\sqrt{2ax+c}).$$

Differentialligningen

$$y = -(2r-1)a\frac{dy}{dx} + (2ax+c)\frac{d^2y}{dx^2}, \tag{37}$$

hvor r er positiv hel, er fuldstændig integreret ved

$$y = c_1\,\varphi_r(\sqrt{2ax+c})\,e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}} + c_2\,\varphi_r(-\sqrt{2ax+c})\,e^{-\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}. \tag{38}$$

12. De i 9 og 11 udførte Integrationer ere imidlertid ikke væsentlig forskjellige. For det første faas (37) af (30) ved Forandring af Fortegnet for r; dernæst kunne ogsaa Integralerne (33) og (38) faa ganske samme Form. I Følge 9 har man

$$\left.\begin{array}{l} f_r(\sqrt{2ax+c}) = (2ax+c)^{-\frac{r}{2}} - 1.C_{r,2}\,a(2ax+c)^{-\frac{r+1}{2}} + 1.3\,C_{r+1,4}\,a^2(2ax+c)^{-\frac{r+2}{2}} + \ldots \\ \ldots(-1)^p 1.3.5\ldots(2p-1)\,C_{r+p-1,2p}\,a^p(2ax+c)^{-\frac{r+p}{2}} \ldots (-1)^{r-1}1.3..(2r-3).a^{r-1}(2ax+c)^{-\frac{2r-1}{2}} \end{array}\right\} (39)$$

Heri kan man med tilbørlig Forsigtighed forandre r til $-r$ og saaledes danne $f_{-r}(\sqrt{2ax+c})$. Det maa derved først erindres, at

$$C_{-r+p-1,2p} = C_{r+p,2p},$$

idet disse to Størrelser blot have Tællernes Faktorer ligestore med modsatte Tegn i omvendt Orden, men paa et lige Antal Faktorers Produkt har Faktorernes Tegnskifte ingen Indflydelse. Dernæst tør Fortegnet for r ikke forandres, hvor dette Bogstav træder frem i en speciel Værdi af p. Saaledes er i sidste Led r i Exponenterne til -1 og a, r i Produktet $1.3\ldots(2r-3)$ og tildels i Exponenten til $2ax+c$ saadanne specielle Værdier af p. Sætter man dernæst

$$(2ax+c)^{-\frac{2r-1}{2}} = (2ax+c)^{-\frac{r+r-1}{2}},$$

ser man, at $r-1$ i Exponenten er en speciel Værdi af p, som ikke skal skifte Tegn med r, hvilket derimod maa være Tilfældet med det foranstaaende r i Exponenten. De første Led i $f_{-r}(\sqrt{2ax+c})$ ville derved blive ganske de samme som de i $\varphi_r(\sqrt{2ax+c})$, ogsaa det almindelige Led vil passe paa $\varphi_r(\sqrt{2ax+c})$, men de sidste Led ville kun vise samme Overensstemmelse, naar r, hvor det fremtræder i en speciel Værdi af p, gjøres til $r+1$; thi Udtrykket for $f_r(\sqrt{2ax+c})$ indeholder kun det samme Antal Led som $\varphi_{r-1}(\sqrt{2ax+c})$, medens $f_{-r}(\sqrt{2ax+c})$ i Følge Loven for Sammensætningen maa indeholde et Led mere.

Derved bliver det sidste Led til

$$(-1)^r 1.3\ldots(2r-1)a^r(2ax+c)^{-\frac{-r+r}{2}},$$

saa at man har faaet

$$f_{-r}(+\sqrt{2ax+c})=\varphi_r(+\sqrt{2ax+c}).$$

Denne Relation er ogsaa gyldig, naar Fortegnet foran $\sqrt{2ax+c}$ forandres. Heraf følger, at

Differentialligningen

$$y=(2r+1)a\frac{dy}{dx}+(2ax+c)\frac{d^2y}{dx^2} \tag{30}$$

er for alle hele r fuldstændig integreret ved

$$y=c_1 f_r(\sqrt{2ax+c})e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}+c_2 f_r(-\sqrt{2ax+c})e^{-\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}, \tag{40}$$

idet f_r er bestemt ved (39)*).

---

*) En mærkelig Egenskab ved Funktionerne $\varphi_r(\sqrt{2ax+c})$ og $f_r(\sqrt{2ax+c})$, der strax opdages ved en Prøve paa Rigtigheden af de ovenfor anførte Integrationer, er at

$$\frac{d.e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}\varphi_{r-1}(\sqrt{2ax+c})}{dx}=e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}\varphi_{r-2}(\sqrt{2ax+c})$$

og

$$\frac{d.e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}f_r(\sqrt{2ax+c})}{dx}=e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}f_{r+1}(\sqrt{2ax+c}),$$

begge gjældende uden Hensyn til Fortegnet for Kvadratroden. Sætter man

$$f_r(\sqrt{2ax+c})=u_r,$$

dannes af (30) den lineære Differensligning

$$u_r=(2r+1)au_{r+1}+(2ax+c)u_{r+2},$$

som saaledes er bevist at have til Integral

$$u_r=c_1 f_r(\sqrt{2ax+c})+c_2 f_r(-\sqrt{2ax+c})$$

for alle hele r.

Endvidere ser man af ovenstaaende, hvorledes de to Ligninger med blandede Differenser

$$\frac{d.e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}v_{r-1}}{dx}=e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}v_{r-2}$$

og

$$\frac{d.e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}u_r}{dx}=e^{\frac{1}{a}\sqrt{2ax+c}}u_{r+1}$$

ere integrerede ved

$$v_{r-1}=\varphi_{r-1}(\sqrt{2ax+c}) \text{ og } u_r=f_r(\sqrt{2ax+c}).$$

13. Anvendelsen af Rækken (26) fører til Integration af (24) ved Hjælp af den Besselske Funktion $J^n(x)$. Denne er vel fra først af defineret af Bessel (Abh. des Kgl. Akad. der Wissensch. aus dem Jahre 1824. Berlin 1826) for hel positiv Index n, men ved Arbejder af Schlömilch (Zeitschr. für Math. u. Phys. B. 2. 1857), Carl Neumann (Theorie der Besselschen Funct. Leipzig 1867) og Lommel (Studien über die Bess. Funct. Leipzig 1868) er Begrebet udvidet til hvilkesomhelst reelle Indices. Dog synes dens Brugbarhed til Integration af Differentialligningen (24) mere indskrænket end Lommel, som har behandlet denne i Tilfældet $b=1$, $c=0$ (jfr. Studien Side 109 ff.), antager. I Betegnelsen af den Besselske Funktion afviger Hansen (Ermittelung der absolutten Stör. in Ellips. 1 Theil. Schr. der Sternwarte Seeburg. Gotha 1843) og derefter Schlömilch fra Bessel og andre Forfattere, idet Bessels uafhængige variable x af Hansen er gjort til $\frac{1}{2}x$. Her falder Hansens Betegnelse bekvemmest, hvilket vel maa erindres, naar man vil sammenligne den følgende Udviklings Resultater med de tidligere.

Som Definition paa den Besselske Funktion bruges her for $\frac{a}{b} > 0$

$$J^{\frac{a}{b}}(x) = \frac{x^{\frac{a}{b}}}{\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{a}{b}+1\right)} - \frac{x^{\frac{a}{b}+2}}{\Gamma(2)\Gamma\left(\frac{a}{b}+2\right)} + \frac{x^{\frac{a}{b}+4}}{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{a}{b}+3\right)} - \ldots (-1)^p \frac{x^{\frac{a}{b}+2p}}{\Gamma(p+1)\Gamma\left(\frac{a}{b}+p+1\right)} + \ldots, \tag{41}$$

stemmende med den af Schlömilch for $\frac{a}{b}$ hel angivne Række, men som ogsaa er gjældende for hvilkesomhelst positive $\frac{a}{b}$. Rækken (26) fører nu til et partikulært Integral ved den Besselske Funktion, naar det almindelige Led deri omskrives saaledes

$$\frac{(bx+c)^p}{[p]b^p(a+b)(a+2b)..(a+(p-1)b)}=(-1)^p\frac{\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right)^{2p}a\Gamma\left(\frac{a}{b}\right)}{\Gamma(p+1)\Gamma\left(\frac{a}{b}+p\right)}.$$

Dette indeholder nemlig for det første en konstant Faktor $a\Gamma\left(\frac{a}{b}\right)$, som ikke findes i (41), for det andet har det $\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}$ for x, dernæst er denne Størrelses Exponent $\frac{a}{b}-1$ mindre end hvad den vilde være i $J^{\frac{a}{b}-1}(x)$ og endelig til samme Tid den sidste Gammafunktion i Nævneren taget af en Størrelse, som indeholder $\frac{a}{b}-1$ istedenfor $\frac{a}{b}$. Man maa følgelig have det partikulære Integral (26) af (24) saaledes udtrykt

$$y_1=c_1\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right)^{-\left(\frac{a}{b}-1\right)}J^{\frac{a}{b}-1}\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right). \qquad (42)$$

Herfra føres man paa en mærkelig simpel Maade til en af de tre Hovedrelationer, som Lommel fastsætter som charakteristiske for, hvad han vil have kaldt Besselske Funktioner af forskjellig Art. En enkelt Differentiation af (24) og Indførelse af

$$\frac{dy}{dx}=y'$$

giver nemlig

$$y'=(a+b)\frac{dy'}{dx}+(bx+c)\frac{d^2y'}{dx^2},$$

hvis partikulære Integral dannes af (42), naar der for a sættes $a+b$, altsaa

$$y_1'=C_1\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right)^{-\frac{a}{b}}J^{\frac{a}{b}}\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right),$$

hvor Konstanten C_1 ikke behøver at være den samme som c_1 i (42). Heraf følger

$$\frac{d.\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right)^{-\left(\frac{a}{b}-1\right)} J^{\frac{a}{b}-1}\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right)}{dx}=C\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right)^{-\frac{a}{b}} J^{-\frac{a}{b}}\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right),$$

hvor altsaa C maa bestemmes. Mere almindelig ville r Differentiationer af (24) og Substitutionen

$$\frac{d^r y}{dx^r}=y^{(r)}$$

give

$$y^{(r)}=(a+rb)\frac{dy^{(r)}}{dx}+(bx+c)\frac{d^2y^{(r)}}{dx^2},$$

som har det partikulære Integral

$$y_1^{(r)}=C_1\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right)^{-\left(\frac{a}{b}+r-1\right)} J^{\frac{a}{b}+r-1}\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right).$$

Altsaa har man

$$\frac{d^r.\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right)^{-\left(\frac{a}{b}-1\right)} J^{\frac{a}{b}-1}\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right)}{dx^r}=C\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right)^{-\left(\frac{a}{b}+r-1\right)} J^{\frac{a}{b}+r-1}\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right)$$

indeholdende en ubestemt Konstant C.

Værdien af C findes let ved at differentiere et Par Led i den ved Hjælp af (41) dannede Række

$$\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right)^{-\left(\frac{a}{b}-1\right)} J^{\frac{a}{b}-1}\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right)=\frac{1}{\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{a}{b}\right)}+\frac{bx+c}{b^2\Gamma(2)\Gamma\left(\frac{a}{b}+1\right)}+\frac{(bx+c)^2}{b^4\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{a}{b}+2\right)}+\ldots;$$

thi derved faas

$$\frac{1}{b}\left(\frac{1}{\Gamma(2)\Gamma\left(\frac{a}{b}+1\right)}+\frac{2(bx+c)}{b^2\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{a}{b}+2\right)}\ldots\right)=\frac{1}{b}\left(\frac{1}{\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{a}{b}+1\right)}+\frac{bx+c}{b^2\Gamma(2)\Gamma\left(\frac{a}{b}+2\right)}+\ldots\right.$$

saa at man maa have

$$\frac{d.\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right)^{-\left(\frac{a}{b}-1\right)} J^{\frac{a}{b}-1}\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right)}{dx}=\frac{1}{b}.\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right)^{-\frac{a}{b}} J^{\frac{a}{b}}\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right)$$

og

$$\frac{d^r.\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right)^{-\left(\frac{a}{b}-1\right)} J^{\frac{a}{b}-1}\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right)}{dx^r}=\frac{1}{b^r}.\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right)^{-\left(\frac{a}{b}+r-1\right)} J^{\frac{a}{b}+r-1}\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right), \quad (43)$$

stemmende med Lommels Formler (Studien Side 6), naar der tages tilbørligt Hensyn dels til den ovenfor berørte Afvigelse i Betegnelsen, dels til den forskjellige Form for den uafhængige variable, som iøvrigt er brugt.

En anden Hovedegenskab ved den Besselske Funktion kan bevises ved Hjælp af Kjædebrøken (25). Da nemlig i Almindelighed (jfr. 1)

$$X=\frac{d.l.y_1}{dx},$$

saa vil den nævnte Kjædebrøk ved Hjælp af (42) og (43) for $r=1$ blive saaledes bestemt

$$X=\frac{1}{b}\,\frac{\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right)^{-\frac{a}{b}} J^{\frac{a}{b}}\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right)}{\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right)^{-\left(\frac{a}{b}-1\right)} J^{\frac{a}{b}-1}\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right)}$$

eller

$$\frac{J^{\frac{a}{b}}\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right)}{\sqrt{-bx-c}\,J^{\frac{a}{b}-1}\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right)}=\cfrac{1}{a+\cfrac{bx+c}{a+b+\cfrac{bx+c}{a+2b+\dots}}}$$

For ikke at arbejde med den sammensatte Form af den uafhængige variable sættes

$$\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}=z$$

og man faar da efter Multiplikation med bz

$$\frac{J^{\frac{a}{b}}(z)}{J^{\frac{a}{b}-1}(z)} = \cfrac{bz}{a - \cfrac{b^2z^2}{a+b - \cfrac{b^2z^2}{a+2b \ldots}}} = \cfrac{z}{\frac{a}{b} - \cfrac{z^2}{\frac{a}{b}+1 - \cfrac{z^2}{\frac{a}{b}+2 \ldots}}},$$

stemmende med den af Bessel selv angivne Kjædebrøk (jfr. ogsaa Schlömilch Side 142 og Lommel Side 5 paa de anførte Steder). Heraf faas nu

$$\frac{J^{\frac{a}{b}}(z)}{J^{\frac{a}{b}-1}(z)} = \cfrac{z}{\frac{a}{b} - \cfrac{zJ^{\frac{a}{b}+1}(z)}{J^{\frac{a}{b}}(z)}},$$

som formes til den nævnte Hovedrelation (jfr. Bessel paa anførte Sted Side 31) saaledes

$$J^{\frac{a}{b}+1}(z) = \frac{a}{bz} J^{\frac{a}{b}}(z) - J^{\frac{a}{b}-1}(z). \qquad (44)$$

Den tredie Hovedrelation for den Besselske Funktion er, som Lommel har udhævet, en Følge af de to andre og der er ingen Anledning til her at dvæle ved dens Udvikling enten af (41), som Schlömilch har gjort det, eller af (43) og (44) efter Lommel. Den er

$$\frac{d.J^{\frac{a}{b}}(z)}{dz} = J^{\frac{a}{b}-1}(z) - J^{\frac{a}{a}+1}(z). \qquad (45)$$

14. Som Schlömilch (anf. Sted Side 147) har vist, kan den Besselske Funktion udtrykkes ved et bestemt Integral saaledes

$$J^{\frac{a}{b}}(x) = \frac{2x^{\frac{a}{b}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a}{b}+\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-u^2)^{\frac{a}{b}-\frac{1}{2}} \cos 2xu\, du, \qquad (46)$$

gjældende for hvilkesomhelst hele og brudne Værdier af $\frac{a}{b}$. Man kan altsaa fremstille det partikulære Integral af (24) ved

$$y_1 = c_1 \int_0^1 (1-u^2)^{\frac{a}{b}-\frac{3}{2}} \cos\frac{2u}{b}\sqrt{-bx-c}\,du$$

eller

$$y_1 = c_1 \int_0^1 (1-u^2)^{\frac{a}{b}-\frac{3}{2}} \left(e^{\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}} + e^{-\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}\right) du. \qquad (47)$$

Prøven af (24) med dette Integral fører til Ligningen

$$\frac{b\left(\frac{a}{b}-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{bx+c}} \int_0^1 (1-u^2)^{\frac{a}{b}-\frac{3}{2}} \left(e^{\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}} - e^{-\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}\right) u\,du =$$
$$\int_0^1 (1-u^2)^{\frac{a}{b}-\frac{1}{2}} \left(e^{\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}} + e^{-\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}\right) du,$$

som er rigtig, saalænge $\frac{a}{b} > \frac{1}{2}$, da man ved delvis Integration kan reducere Ligningens venstre Side til, hvad der findes paa højre. Anvendelsen af (47) og dermed af (42) til Integration af (24) gjælder altsaa ikkun for $\frac{a}{b} > \frac{1}{2}$.

Det andet partikulære Integral af (24) vil, udledt paa sædvanlig Maade (jfr. 1), faa en meget sammensat Form. Men man kan søge at fremstille det i en med (47) analog Skikkelse, saasom

$$y_2 = \int_0^1 (1-u^2)^{\alpha} (bx+c)^{\beta} \left(e^{\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}} + e^{-\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}\right) du$$

og søge α og β bestemte saaledes, at (24) om muligt er tilfredsstillet. Man finder

$$\frac{dy}{dx} = b\beta \int_0^1 (1-u^2)^{\alpha} (bx+c)^{\beta-1} \left(e^{\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}} + e^{-\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}\right) du +$$
$$\int_0^1 (1-u^2)^{\alpha} (bx+c)^{\beta-\frac{1}{2}} \left(e^{\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}} - e^{-\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}\right) u\,du,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = b^2\beta(\beta-1) \int_0^1 (1-u^2)^{\alpha} (bx+c)^{\beta-2} \left(e^{\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}} + e^{-\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}\right) du +$$
$$\left(2b\beta - \frac{1}{2}b\right) \int_0^1 (1-u^2)^{\alpha} (bx+c)^{\beta-\frac{3}{2}} \left(e^{\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}} - e^{-\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}\right) u\,du$$
$$+ \int_0^1 (1-u^2)^{\alpha} (bx+c)^{\beta-1} \left(e^{\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}} + e^{-\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}\right) u^2\,du,$$

og ved Indsættelse i (24) og Sammendragning

$$\int_0^1 (1-u^2)^{\alpha+1}(bx+c)^\beta\left(e^{\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}+e^{-\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}\right)du=$$

$$b\beta(a+b\beta-b)\int_0^1 (1-u^2)^\alpha(bx+c)^\beta\left(e^{\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}+e^{-\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}\right)du+$$

$$\left(a+2b\beta-\frac{1}{2}b\right)\int_0^1 (1-u^2)^\alpha(bx+c)^{\beta-\frac{1}{2}}\left(e^{\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}-e^{-\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}\right)udu.$$

Ved delvis Integration af det sidste Integral paa højre Side vil man, forudsat at $\alpha+1>0$, faa istedenfor dette

$$\frac{a+2b\beta-\frac{1}{2}b}{b(\alpha+1)}\int_0^1 (1-u^2)^{\alpha+1}(bx+c)^\beta\left(e^{\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}+e^{-\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}\right)du,$$

saa at der til Identitet af begge Ligningens Sider kræves

$$a+b\beta-b=0,$$

$$a+2b\beta-\frac{1}{2}b=b\alpha+b.$$

Heraf faas

$$\beta=1-\frac{a}{b},\quad \alpha=\frac{1}{2}-\frac{a}{b}>-1,$$

saa at man, saalænge $\frac{a}{b}<\frac{3}{2}$, vil have det andet partikulære Integral

$$y_2=c_2(bx+c)^{1-\frac{a}{b}}\int_0^1 (1-u^2)^{\frac{1}{2}-\frac{a}{b}}\left(e^{\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}+e^{-\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}\right)du. \quad (48)$$

Tager man Hensyn til (42) og (46), vil dette ogsaa kunne skrives

$$y_2=c_2\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right)^{-\left(\frac{a}{b}-1\right)} J^{-\left(\frac{a}{b}-1\right)}\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right). \quad (49)$$

De to partikulære Integraler (47) og (48) eller (42) og (49) gjælde altsaa for (24), saalænge $\frac{3}{2}>\frac{a}{b}>\frac{1}{2}$, dog saa, at i Tilfældet $\frac{a}{b}=1$ blive begge de partikulære Integraler ligestore og kunne saaledes ikke bruges til Dannelse af det fuldstændige uden igjennem (6). Saaledes faas, at

Differentialligningen

$$y=a\frac{dy}{dx}+(bx+c)\frac{d^2y}{dx^2} \quad (24)$$

har for $\frac{3}{2} > \frac{a}{b} > 1$ og $1 > \frac{a}{b} > \frac{1}{2}$ det fuldstændige Integral

$$y = \left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right)^{-\left(\frac{a}{b}-1\right)} \left(c_1 J^{\frac{a}{b}-1}\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right) + c_2 J^{-\left(\frac{a}{b}-1\right)}\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right)\right) \tag{50}$$

eller

$$y = \int_0^1 \left[c_1(1-u^2)^{\frac{a}{b}-\frac{3}{2}} + c_2(bx+c)^{1-\frac{a}{b}}(1-u^2)^{\frac{1}{2}-\frac{a}{b}}\right]\left(e^{\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}} + e^{-\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}\right) du. \tag{51}$$

Lommel har angivet (50) for Tilfældet $b=1$, $c=0$, men uden Indskrænkning med Hensyn til a.

15. Tilfældet $\frac{a}{b}=1$, som her maatte udelukkes, kan lettest behandles efter et almindeligt Princip i Differentialregningen (fremsat 1859 i math. Tidskrift første Aarg. P. 145 og anvendt sammesteds P. 149 paa Integration af lineære Differentialligninger, hvis partikulære Integraler i specielle Tilfælde blive identiske; jfr. ogsaa mine Forelæsninger over Diff. og Integralregn. Kbhvn 1860 P. 183 og 192). Hvis nemlig $y=f(x,m)$ er Formen for flere partikulære Integraler i en lineær Differentialligning, som i Almindelighed blive forskjellige ved Værdierne for m, men i specielle Tilfælde r af disse Værdier for m blive ligestore, saa at Antallet af partikulære Integraler derved formindskes, saa vil ikke blot $y=f(x,m)$, men ogsaa $\frac{dy}{dm}$, $\frac{d^2y}{dm^2} \dots \frac{d^{r-1}y}{dm^{r-1}}$ for et saadant specielt m blive partikulære Integraler. Naar derfor (24) for $\frac{a}{b}=1$ faar sine to partikulære Integraler (47) og (48) eller (42) og (49) identiske, saa maa et af dem i den oprindelige Skikkelse differentieres med Hensyn til $\frac{a}{b}$ og derefter sættes $\frac{a}{b}=1$; det udkomne bliver da det andet partikulære Integral. Her er imidlertid Valget af den Form for det partikulære Integral, som differentieres, ikke ligegyldigt; (42) og (49) ere nemlig vanskelige at differentiere med Hensyn til $\frac{a}{b}$ og (47) har en mere speciel Form end (48), saa at det bliver nødvendigt at behandle (48) paa den angivne Maade. Sætter man det under Formen

$$\int_0^1 (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}[(bx+c)(1-u^2)]^{1-\frac{a}{b}}\left(e^{\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}+e^{-\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}\right)du,$$

differentierer med Hensyn til $\frac{a}{b}$ og gjør $\frac{a}{b}=1$, faar man det, som skulde være det andet partikulære Integral, nemlig

$$y_2=\int_0^1 (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}[l.(bx+c)+l.(1-u^2)]\left(e^{\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}+e^{-\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}\right)du. \quad (52)$$

Rigtigheden heraf maa dog prøves. Man faar

$$\frac{dy_2}{dx}=\frac{b}{bx+c}\int_0^1 (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}\left(e^{\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}+e^{-\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}\right)du$$

$$+\frac{1}{\sqrt{bx+c}}\int_0^1 (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}[l.(bx+c)+l.(1-u^2)]\left(e^{\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}-e^{-\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}\right)udu,$$

$$\frac{d^2y_2}{dx^2}=-\frac{b^2}{(bx+c)^2}\int_0^1 (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}\left(e^{\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}+e^{-\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}\right)du$$

$$+\frac{2b}{(bx+c)^{\frac{3}{2}}}\int_0^1 (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}\left(e^{\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}-e^{-\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}\right)udu$$

$$-\frac{b}{2(bx+c)^{\frac{3}{2}}}\int_0^1 (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}(l.(bx+c)+l.(1-u^2))\left(e^{\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}-e^{-\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}\right)udu$$

$$+\frac{1}{bx+c}\int_0^1 (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}(l.(bx+c)+l.(1-u^2))\left(e^{\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}+e^{-\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}\right)u^2du.$$

Indsættes alt dette i (24) med b for a og trækkes det sidste Integral i $(bx+c)\frac{d^2y_2}{dx^2}$ over til venstre Side af Ligningen, saa faas der

$$\int_0^1 (1-u^2)^{\frac{1}{2}}(l.(bx+c)+l.(1-u^2))\left(e^{\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}+e^{-\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}\right)du,$$

medens de paa højre Side staaende Led sammendrages til

$$\frac{b}{2\sqrt{bx+c}}\int_0^1 (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}(l.(bx+c)+l.(1-u^2))\left(e^{\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}-e^{-\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}\right)udu$$

$$+\frac{2b}{\sqrt{bx+c}}\int_0^1 (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}\left(e^{\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}-e^{-\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}\right)udu.$$

Delvis Integration af det første af disse to Led giver

$$\int_0^1 (1-u^2)^{\frac{1}{2}} (l.(bx+c)+l.(1-u^2)) \left(e^{\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}+e^{-\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}\right) du$$

$$-\frac{2b}{\sqrt{bx+c}} \int_0^1 (1-u^2)^{-\frac{1}{2}} \left(e^{\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}-e^{-\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}\right) u du,$$

saa at derved Identiteten af begge Ligningens Sider er godtgjort. Naar nu til Sammenligning med Resultaterne i 8 og 9 sættes a for b, saa faar man, at

Differentialligningen

$$y = a\frac{dy}{dx} + (ax+c)\frac{d^2y}{dx^2} \tag{53}$$

har det fuldstændige Integral

$$y = \int_0^1 (1-u^2)^{-\frac{1}{2}} [c_1 + c_2 l.(ax+c)(1-u^2)] \left(e^{\frac{2u}{a}\sqrt{ax+c}}+e^{-\frac{2u}{a}\sqrt{ax+c}}\right) du. \tag{54}$$

Integrationen af (53) kunde ogsaa være udført ved Hjælp af de angivne Hovedegenskaber ved de Besselske Funktioner, naar man vilde følge den Vej, som Carl Neumann (Theorie o. s. v. P. 41) har anvist for en anden Differentialligning, som ogsaa har en Besselsk Funktion til partikulært Integral. Men den her valgte Fremgangsmaade synes at maatte foretrækkes, baade fordi den støtter sig til et almindeligt Princip og fordi den kun forudsætter simple Regninger, der hurtigt føre til Maalet; den af Neumann integrerede Ligning vilde vistnok ogsaa kunne behandles paa samme Maade.

16. Differentialligningen (24) skulde endnu særskilt behandles for de Tilfælde, hvor $\frac{a}{b}$ er brudden udenfor Grænserne $\frac{3}{2}$ og $\frac{1}{2}$ og hvor den er hel forskjellig fra 1; men da Resultaterne blive meget sammensatte og paa den anden Side ikke altid saa vanskelige at finde, som vidtløftige at fremstille, saa skal her kun kort angives, hvorledes Problemet løses.

Man faar i Følge 7 af (24) med Betegnelsen (29)

$$y^{(r)} = (a+rb)\frac{dy^{(r)}}{dx} + (bx+c)\frac{d^2y^{(r)}}{dx^2}.$$

Er nu $\frac{3}{2} > \frac{a}{b} > 1$ eller $1 > \frac{a}{b} > \frac{1}{2}$, saa bliver $\frac{a}{b} + r$ brudden og større end $\frac{3}{2}$, og $y^{(r)}$ faas af (51) ved r Differentiationer. Disse kræve Anvendelse dels af de i 9 brugte Funktioner, dels af den bekjendte Leibnitziske Formel for Differentiation af et Produkt af to Funktioner, hvormed ingen Vanskelighed er forbunden.

Er $\frac{a}{b}$ hel større end 1, faas af (53)

$$y^{(r)} = (r+1)\,a\,\frac{dy^{(r)}}{dx} + (ax+c)\,\frac{d^2y^{(r)}}{dx^2},$$

hvis Integral udledes af (54) ved r Differentiationer.

I begge disse Tilfælde var $\frac{a}{b}$ positiv. Ved Integrationer af (24) og (53) paa den i 11 anvendte Maade vilde man faa de til negative $\frac{a}{b}$, henholdsvis brudne og hele, svarende Differentialligninger. Disses Integraler skulle altsaa dannes henholdsvis af (51) og (54) ved r Integrationer, og disses Udførelse vil ikke blot blive vidtløftig, men ogsaa vanskelig.

17. Naar man i (24) har $a=0$, gjælder Bestemmelsen af X i (25), med hvad deraf er udledt, ikke mere. Men (4) giver da for $P=0$

$$\frac{y}{\frac{dy}{dx}} = \frac{Q}{P_1 + \frac{Q_1}{P_2 + \ldots}},$$

saa at man kan sætte

$$\frac{dy}{dx} - Xy = 0, \quad X = \frac{1}{Q}\left(P_1 + \frac{Q_1}{P_2 + \frac{Q_2}{P_3 + \ldots}}\right). \tag{55}$$

Differentialligningen

$$y = (bx+c)\,\frac{d^2y}{dx^2} \tag{56}$$

har altsaa et partikulært Integral afhængigt af

$$X = \frac{1}{bx+c}\left(b + \frac{bx+c}{2b + \frac{bx+c}{3b + \ldots}}\right),$$

som i Følge 7 bliver

$$X=\frac{b}{bx+c}+\frac{1}{2b}\frac{\varphi\left(3b,\frac{bx+c}{b},\,b\right)}{\varphi\left(2b,\frac{bx+c}{b},\,b\right)}$$

eller

$$X=\frac{b}{bx+c}+\frac{d.}{dx}l.\left(2b+\frac{bx+c}{b}+\frac{1}{2}\frac{(bx+c)^2}{3b^3}+\frac{1}{2.3}\frac{(bx+c)^3}{3.4.b^5}+\dots\right.$$
$$\left.+\frac{1}{[p]}\frac{(bx+c)^p}{3.4\dots(p+1)\,b^{2p-1}}\dots\right).$$

Det partikulære Integral af (56) udvikles altsaa i følgende Række

$$y_1=c_1(bx+c)\left(2b+\frac{bx+c}{b}+\frac{1}{2}\frac{(bx+c)^2}{3b^3}+\dots+\frac{1}{[p]}\frac{(bx+c)^p}{3.4\dots(p+1)b^{2p-1}}\dots\right).$$

Denne Række kan omdannes til en Besselsk Funktion, fordi dens almindelige Led er

$$(-1)^p2b(bx+c)\frac{\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right)^{2p}}{\Gamma(p+1)\Gamma(p+2)}=(-1)^{p+1}2b^3\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\frac{\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right)^{2p+1}}{\Gamma(p+1)\Gamma(p+2)},$$

altsaa

$$y_1=c_1\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\,J\left(\frac{\sqrt{-bx-c}}{b}\right),$$

hvilket ogsaa faas af (49) for $\frac{a}{b}=0$ og derfor kunde opskrives umiddelbart, da (49) gjælder for $\frac{a}{b}<\frac{3}{2}$. Af (48) faas det i Formen

$$y_1=c_1(bx+c)\int_0^1(1-u^2)^{\frac{1}{2}}\left(e^{\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}+e^{-\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}\right)du.$$

Det andet partikulære Integral kan findes af (54). Dersom nemlig (53) integreres en Gang (som i 11), og man sætter y for $\int y dx$, b for a, saa faas (56), og altsaa maa det manglende partikulære Integral kunne faas af et af dem i (54) ved en enkelt Integration med Hensyn til x. Men det kan ikke være af det første, som henhører til Gruppen (42) og (47), svarende til $\frac{a}{b}>\frac{1}{2}$, altsaa af det sidste, som svarer til $\frac{a}{b}<\frac{3}{2}$. Altsaa bliver

$$y_2=c_2\int_0^1(1-u^2)^{\frac{1}{2}}du\int l.(bx+c)\left(e^{\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}+e^{-\frac{2u}{b}\sqrt{bx+c}}\right)dx$$

det andet partikulære Integral. —

18. Naar baade P og Q ere variable, vil et af de simpleste Tilfælde være det, hvor

$$P=ax+b, \qquad Q=fx^2+gx+h.$$

Deraf følger

$$P_1=\frac{(a+2f)x+b+g}{1-a}, \qquad Q_1=\frac{fx^2+gx+h}{1-a},$$

$$P_2=\frac{(a+4f)x+b+2g}{1-2a-2f}, \qquad Q_1=\frac{fx^2+gx+h}{1-2a-2f} \text{ o. s. v.,}$$

almindelig

$$P_r=\frac{(a+2rf)\,x+b+rg}{1-ra-r(r-1)f}, \qquad Q_r=\frac{fx^2+gx+h}{1-ra-r(r-1)f}.$$

Integrationen kræver altsaa Summationen af Kjædebrøken

$$X=\cfrac{1}{ax+b+\cfrac{(fx^2+gx+h)(1-a)}{(a+2f)x+b+g+\cfrac{(fx^2+gx+h)(1-2a-2f)}{(a+4f)x+b+2g+\dots}}}, \tag{57}$$

hvilken ikke er bekjendt, selv om Betingelsen for Konvergens findes at være opfyldt. Men der gives en stor Mængde Tilfælde, i hvilke (57) bliver endelig, og da vil Problemet altid være reduceret til Kvadratur.

Først mærkes Tilfældet

$$1-(r+1)a-(r+1)rf=0, \qquad f=\frac{1}{r(r+1)}-\frac{a}{r},$$

hvorved Differentialligningen bliver

$$r(r+1)y=r(r+1)(ax+b)\frac{dy}{dx}+((1-(r+1)a)x^2+r(r+1)gx+r(r+1)h)\frac{d^2y}{dx^2}. \tag{58}$$

p Differentiationer heraf give

$$(r-p+1)(r+p-p(r+1)a)\frac{d^py}{dx^p}=[(2p+(r-2p)(r+1)a)x+r(r+1)(b+pg)]\frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}}.$$

$$+[(1-(r+1)a)x^2+r(r+1)gx+r(r+1)h]\frac{d^{p+2}y}{dx^{p+2}},$$

altsaa for $p=r+1$

$$0=(r+1)[(2-(r+2)a)x+r(b+(r+1)g)]\frac{d^{r+2}y}{dx^{r+2}}+[(1-(r+1)a)x^2+r(r+1)gx+r(r+1)h]\frac{d^{r+3}y}{dx^{r+3}},$$

hvoraf

$$\frac{d^{r+2}y}{dx^{r+2}}=c_1 e^{-(r+1)\int\frac{(2-(r+2)a)x+r(b+(r+1)g)}{(1-(r+1)a)x^2+r(r+1)gx+r(r+1)h}dx}=c_1 u,$$

$$\frac{d^{r+1}y}{dx^{r+1}}=c_1\int u dx+c_2,$$

saa at der gives et partikulært Integral af (58), som er et Polynomium af $(r+1)^{te}$ Grad. Betegnes dette saaledes

$$y=x^{r+1}+A_0x^r+A_1x^{r-1}+\ldots.+A_px^{r-p}+\ldots.+A_r, \qquad (59)$$

saa sker Koefficienternes rekurrente Bestemmelse let ved Udtrykkets Indsættelse i (58). Man faar

$$\left.\begin{aligned} A_0&=(r+1)^2\,\frac{b+rg}{2-(r+1)a},\\ A_1&=\frac{r(r+1)}{2}\cdot\frac{r[(b+(r-1)g)A_0+(r+1)h]}{2r-1-(r-1)(r+1)a}, \end{aligned}\right\} \qquad (60)$$

og i Almindelighed

$$A_p=\frac{r(r+1)}{p+1}\cdot\frac{(r-p+1)[(b+(r-p)g)A_{p-1}+(r-p+2)hA_{p-2}]}{2r-p-(r-p)(r+1)a},$$

hvorved dog maa forudsættes, at ikke

$$2r-p-(r-p)(r+1)a=0. \qquad (61)$$

Ex. $r=1$ giver

$$2y=2(ax+b)\frac{dy}{dx}+((1-2a)x^2+2gx+2h)\frac{d^2y}{dx^2},$$

hvis ene partikulære Integral bestemmes af

$$\frac{d^3y_1}{dx^3}=c_1e^{-2\int\frac{(2-3a)x+b+2g}{(1-2a)x^2+2gx+2h}dx}$$

og hvis andet partikulære Integral er

$$y_2=c_2\left(x^2+\frac{2(b+g)}{1-a}x+\frac{2b(b+g)+2h(1-a)}{1-a}\right).$$

Et simplere Tilfælde af (58) indtræder, naar $a=\frac{1}{r+1}$, da man faar

$$y = \left(\frac{x}{r+1} + b\right)\frac{dy}{dx} + (gx+h)\frac{d^2y}{dx^2},$$

som for alle hele r vil være integrabel, idet det ene partikulære Integral er reduceret til Kvadratur og det andet er et helt Polynomium af Graden $r+1$.

Men Koefficienterne i (59) kunne bestemmes ved endelige Kjædebrøker formedelst den tredie (60). Man har nemlig først

$$(p+1)(2r-p-(r-p)(r+1)a)A_p = r(r+1)(r-p+1)(b+(r-p)g)A_{p-1}$$
$$+r(r+1)(r-p+2)(r-p+1)hA_{p-2},$$

og dernæst, efter Division med $r(r+1)(r-p+1)gA_p$ og i Følge den forkortede Betegnelse

$$\alpha_p = \frac{(p+1)(2r-p-(r-p)(r+1)a)}{r(r+1)},$$

$$\frac{\alpha_p}{(r-p+1)g} = \left(\frac{b}{g} + r - p + (r-p+2)\frac{h}{g}\frac{A_{p-2}}{A_{p-1}}\right)\frac{A_{p-1}}{A_p}.$$

Kjædebrøken

$$\frac{A_{p-1}}{A_p} = \cfrac{\frac{\alpha_p}{(r-p+1)g}}{\frac{b}{g} + r - p + \cfrac{\frac{\alpha_{p-1}h}{g^2}}{\frac{b}{g} + r - p + 1 + \cfrac{\frac{\alpha_{p-2}h}{g^2}}{\frac{b}{g} + r - p + 2 + \dots,}}} \qquad (62)$$

som er endelig og hvis Værdi betegnes ved K_p, giver da

$$A_p = \frac{A_{p-1}}{K_p}, \quad A_{p-1} = \frac{A_{p-2}}{K_{p-1}} \text{ o. s. v.,}$$

følgelig

$$A_p = \frac{A_0}{K_p K_{p-1} \dots K_2 K_1} = (r+1)^2 \frac{b+rg}{2-(r+1)a} \frac{1}{K_p K_{p-1} \dots K_2 K_1}.$$

Saaledes ses, at, idet $A_0 K_0 = 1$,

Differentialligningen

$$y = (ax+b)\frac{dy}{dx} + \left(\left(\frac{1}{r(r+1)} - \frac{a}{r}\right)x^2 + gx + h\right)\frac{d^2y}{dx^2} \qquad (58)$$

har for positive hele r det partikulære Integral

$$y=x^{r+1}+\frac{x^r}{K_0}+\frac{x^{r-1}}{K_1K_0}+\frac{x^{r-2}}{K_2K_1K_0}+\cdots+\frac{x}{K_{r-1}K_{r-2}\ldots K_0}+\frac{1}{K_rK_{r-1}\ldots K_0}, \quad (63)$$

K_p bestemt ved (62).

Har man $a=\frac{1}{r+1}$, faar man $\alpha_p=\frac{p+1}{r+1}$, altsaa

$$K_p=\cfrac{\frac{p+1}{(r-p+1)(r+1)g}}{\frac{b}{g}+r-p+\cfrac{\frac{ph}{(r+1)g^2}}{\frac{b}{g}+r-p+1+\cfrac{\frac{(p-1)h}{(r+1)g^2}}{\frac{b}{g}+r-p+2+\ldots}}}, \quad (64)$$

og følgelig

Differentialligningen

$$y=\left(\frac{x}{r+1}+b\right)\frac{dy}{dx}+(gx+h)\frac{d^2y}{dx^2} \quad (65)$$

har for positive hele r det partikulære Integral

$$y=x^{r+1}+\frac{x^r}{K_0}+\frac{x^{r-1}}{K_1K_0}+\frac{x^{r-2}}{K_2K_1K_0}+\cdots\frac{1}{K_rK_{r-1}\ldots K_0}, \quad (66)$$

K_p bestemt ved (64).

19. Integrationen af (58) gjælder ikke, naar a tilfredsstiller (61) for hele r og p, eller, naar der for p indføres q og

$$a=\frac{2r-q}{(r-q)(r+1)}.$$

Man faar da for (58)

$$y=\left(\frac{2r-q}{(r-q)(r+1)}x+b\right)\frac{dy}{dx}+\left(-\frac{1}{(r-q)(r+1)}x^2+gx+h\right)\frac{d^2y}{dx^2}, \quad (67)$$

og ved p Differentiationer deraf maa der (jfr. Differentiationen af (58) i 18) paa venstre Side af Ligningen fremkomme en Faktor i Koefficienten, som er

$$r+p-p\frac{2r-q}{r-q}=\frac{r(r-q-p)}{r-q},$$

altsaa ved $p=r-q$ Differentiationer forsvinder dette Led. Den $(r-q)^{te}$ Differentialligning af (67) bliver da

Deres Udtryk i endelige Kjædebrøker faas ved

$$\alpha_p = \frac{p(2r-p)}{r^2}$$

og

$$K_p = \frac{A_{p-1}}{A_p} = \cfrac{\frac{\alpha_p}{(r-p+1)g}}{\frac{b}{g}+r-p+\cfrac{\frac{\alpha_{p-1}h}{g^2}}{\frac{b}{g}+r-p+1+\ldots}}, \qquad (72)$$

nemlig

$$A_p = \frac{r^3(b+(r-1)g)}{2r-1}\,\frac{1}{K_pK_{p-1}\ldots K_2} = \frac{1}{K_pK_{p-1}\ldots K_2K_1}.$$

Differentialligningen

$$y = \left(\frac{x}{r^2}+b\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{x^2}{r^2}+gx+h\right)\frac{dy}{dx^2} \qquad (73)$$

har for hele positive r det partikulære Integral

$$y = x^r + \frac{x^{r-1}}{K_1} + \frac{x^{r-2}}{K_2K_1} + \frac{x^{r-3}}{K_3K_2K_1} + \ldots \frac{1}{K_rK_{r-1}\ldots K_1} \qquad (74)$$

K_p bestemt ved (72).

21. Den i (18) fremsatte Form af Differentialligningen, hvor nemlig P og Q ere hele, rationale, algebraiske Funktioner af henholdsvis første og anden Grad fører til simplere Resultater, naar man har saadan Forbindelse imellem dem, at

$$k\,\frac{d.(fx^2+gx+h)}{dx} = 2(ax+b),$$

hvor k er hvilkensomhelst konstant og 2 tilføjet blot for Bekvemmeligheds Skyld. Man faar da

$$fx^2+gx+h = \frac{1}{ka}(ax+b)^2+c$$

og altsaa Differentialligningen

$$y = (ax+b)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{ka}(ax+b)^2+c\right)\frac{d^2y}{dx^2}, \qquad (75)$$

samt den tilsvarende Kjædebrøk

$$X=\frac{1}{ax+b+}\frac{\left(\frac{1}{ka}(ax+b)^2+c\right)(1-a)}{\frac{k+2}{k}(ax+b)}+\frac{\left(\frac{1}{ka}(ax+b)^2+c\right)\left(1-\frac{2(k+1)}{k}a\right)}{\frac{k+4}{k}(ax+b)+\ldots} \quad (76)$$

Denne Kjædebrøk bliver endelig, naar

$$a=\frac{k}{r(k+r-1)},$$

og Differentialligningen vil da, idet man tillige ændrer Betegnelserne saaledes, at

$$b \text{ gjøres til } \frac{kb}{r(k+r-1)}, \quad c \text{ til } \frac{c}{r(k+r-1)},$$

og multiplicerer med $r(k+r-1)$, blive

$$r(k+r-1)y=k(x+b)\frac{dy}{dx}+((x+b)^2+c)\frac{d^2y}{dx^2}. \quad (77)$$

Ved p Differentiationer heraf faas

$$(r-p)(k+r+p-1)\frac{d^py}{dx^p}=(k+2p)(x+b)\frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}}+((x+b)^2+c)\frac{d^{p+2}y}{dx^{p+2}},$$

altsaa for $p=r$

$$\frac{d^{r+1}y}{dx^{r+1}}=c_1e^{-\int\frac{(k+2r)(x+b)}{(x+b)^2+c}dx}=\frac{c_1}{((x+b)^2+c)^{\frac{1}{2}k+r}},$$

$$\frac{d^ry}{dx^r}=c_1\int\frac{dx}{((x+b)^2+c)^{\frac{1}{2}k+r}}+c_2.$$

Sætter man det andet partikulære Integral under Formen

$$y=(x+b)^r+A_1(x+b)^{r-1}+A_2(x+b)^{r-2}+\ldots+A_r,$$

finder man

$$A_1=0, \quad A_{2p-1}=0, \quad A_2=\frac{r(r-1)}{2(k+2r-3)}c,$$

$$A_{2p}=\frac{(r-2p+1)(r-2p+2)}{2p(k+2r-2p-1)}cA_{2p-2},$$

altsaa

$$A_{2p}=\frac{r(r-1)(r-2)\ldots\ldots(r-2p+3)(r-2p+2)(r-2p+1)}{2.4.6\ldots2p.(k+2r-2p-1)(k+2r-2p+1)\ldots(k+2r-3)}c^p. \quad (78)$$

22. Antager man i (77) og (78) $k=1$, samt forandrer c til $-4c^2$, faar man

$$r^2y=(x+b)\frac{dy}{dx}+((x+b)^2-4c^2)\frac{d^2y}{dx^2}$$

og

$$A_{2p}=(-1)^p\frac{r(r-p-1)(r-p-2)...(r-2p+1)}{1.2.3...p}c^{2p}.$$

Følgelig bliver det hele rationale partikulære Integral

$$y_1=(x+b)^r-\frac{r}{1}c^2(x+b)^{r-2}+\frac{r(r-3)}{1.2}c^4(x+b)^{r-4}-\frac{r(r-4)(r-5)}{1.2.3}c^6(x+b)^{r-6}+....,$$

som standser af sig selv, naar r er ulige, med første Potens af $x+b$, naar r er lige, med et konstant Led. Men som bekjendt (jfr. Euler comment. Acad. scient. Petrop. ann. 1738, se ogsaa Ramus, Algebra og Funktionslære Side 155, 157 og 158) kan denne Funktion omskrives til

$$y_1=\left(\frac{x+b+\sqrt{(x+b)^2-4c^2}}{2}\right)^r+\left(\frac{x+b-\sqrt{(x+b)^2-4c^2}}{2}\right)^r.$$

Man overbeviser sig om dette Resultats Rigtighed ved en Prøve; thi denne giver først

$$\frac{dy_1}{dx}=\frac{r}{\sqrt{(x+b)^2-4c^2}}\left[\left(\frac{x+b+\sqrt{(x+b)^2-4c^2}}{2}\right)^r-\left(\frac{x+b-\sqrt{(x+b)^2-4c^2}}{2}\right)^r\right]$$

og dernæst

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=\frac{r^2}{(x+b)^2-4c^2}y_1-\frac{x+b}{(x+b)^2-4c_1^2}\frac{dy_1}{dx}.$$

Derhos viser Prøven, at Fortegnet imellem de to Led i y_1 ogsaa kan være minus, og som Følge deraf kan det fuldstændige Integral faa Formen

$$y=c_1(x+b+\sqrt{(x+b)^2-4c_1^2})^r+c_2(x+b-\sqrt{(x+b)^2-4c_1^2})^r.$$

Endelig ser man ogsaa, at Prøven er ganske uafhængig af r's Beskaffenhed, saa at den tidligere Indskrænkning, hvorefter r skal være positiv hel, bortfalder. Altsaa

Differentialligningen

$$ky=(x+b)\frac{dy}{dx}+((x+b)^2-4c^2)\frac{d^2y}{dx^2} \qquad (79)$$

har for alle konstante k det fuldstændige Integral

$$y=c_1\left(x+b+\sqrt{(x+b)^2-4c^2}\right)^{\sqrt{k}}+c_2\left(x+b-\sqrt{(x+b)^2-4c^2}\right)^{\sqrt{k}} \quad (80)$$

23. Naar man i Differentialligningen

$$\frac{d^2y}{d\theta^2}+ky=0,$$

hvis fuldstændige Integral for positive k bedst fremstilles ved

$$y=c_1 \sin\theta\sqrt{k}+c_2 \cos\theta\sqrt{k},$$

sætter

$$\cos\theta=x,$$

faar man

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+ky=0$$

med Integralet

$$y=c_1 \sin(\sqrt{k}\, arc(\cos=x))+c_2 \cos(\sqrt{k}\, arc(\cos=x)).$$

Men den dertil svarende Kjædebrøk faas i Følge 18 af (57) for $a=f=\frac{1}{k}$, $b=g=0$, $h=-\frac{1}{k}$, altsaa

$$X=\frac{k}{x}+\frac{(k-1)(x^2-1)}{3x}+\frac{(k-4)(x^2-1)}{5x}+\frac{(k-9)(x^2-1)}{7x}+\ldots,$$

hvis almindelige Led er

$$\frac{(k-p^2)(x^2-1)}{(2p+1)x}.$$

For reelle θ, $x<1$ vil denne Kjædebrøk nødvendig ende med lutter positive Led, saa at Betingelsen for Konvergens bliver

$$Lim\ \frac{(4p^2-1)x^2}{(p^2-k^2)(1-x^2)}=\frac{4x^2}{1-x^2}=4\cot^2\theta>0,$$

som altid er opfyldt.

I Følge 1 maa denne Kjædebrøk være Udtrykket for

$$\text{enten } \frac{d.l.\sin(\sqrt{k}\, arc(\cos=x))}{dx} \text{ eller } \frac{d.l.\cos(\sqrt{k}\, arc(\cos=x))}{dx},$$

det vil sige

enten $\mp cot(\sqrt{k}\, arc\,(cos = x))\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{1-x^2}}$ eller $\pm tg(\sqrt{k}\, arc\,(cos = x))\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{1-x^2}}$,

hvor Fortegnet er det, som $sin\,\theta$ har. Men da $k=1$ giver

$$X = \frac{1}{x} = \pm \frac{tg\theta}{\sqrt{1-x^2}},$$

saa maa man have

$$tg\,(\sqrt{k}\, arc(cos = x)) = \cfrac{\pm\sqrt{k}\sqrt{1-x^2}}{x + \cfrac{(1-k)(1-x^2)}{3x + \cfrac{(4-k)(1-x^2)}{5x + \cfrac{(9-k)(1-x^2)}{7x + \ldots}}}},$$

en Kjædebrøk, jeg i math. Tidsskr. 1. Aarg. S. 133 (jfr. S. 29) har fremstillet saaledes

$$\left.\begin{aligned} tg.\theta\sqrt{k} &= \cfrac{\sqrt{k}\,sin\,\theta}{cos\theta + \cfrac{(1-k)sin^2\theta}{3cos\theta + \cfrac{(4-k)sin^2\theta}{5cos\theta + \cfrac{(9-k)sin^2\theta}{7cos\theta + \ldots}}}} \\ \text{eller} \quad tg.\theta\sqrt{k} &= \cfrac{\sqrt{k}\,tg\,\theta}{1 + \cfrac{(1-k)tg^2\theta}{3 + \cfrac{(4-k)tg^2\theta}{5 + \cfrac{(9-k)tg^2\theta}{7 + \ldots}}}} \end{aligned}\right\} \quad (81)$$

Herved bliver det muligt at integrere

$$ky = (x+b)\frac{dy}{dx} - ((x+b)^2 - 4c^2)\frac{d^2y}{dx^2}, \qquad (82)$$

der ved det sidste Leds Fortegn afviger fra (79). Man faar den til (82) svarende Kjædebrøk at være

$$X = \cfrac{k}{x+b + \cfrac{(1-k)\,(4c^2-(x+b)^2)}{3(x+b) + \cfrac{(4-k)\,(4c^2-(x+b)^2)}{5(x+b) + \ldots}}},$$

som kan sættes under Formen

$$X = \cfrac{\frac{k}{2c}}{\frac{x+b}{2c} + \cfrac{(1-k)\left(1-\left(\frac{x+b}{2c}\right)^2\right)}{3\,\frac{x+b}{2c} + \cfrac{(4-k)\left(1-\left(\frac{x+b}{2c}\right)^2\right)}{5\,\frac{x+b}{2c} + \ldots}}} = tg\left(\sqrt{k}\, arc\left(cos = \frac{x+b}{2c}\right)\right)\frac{\frac{\sqrt{k}}{2c}}{\sqrt{1-\frac{(x+b)^2}{4c^2}}}$$

Skjønt der ingen Sikkerhed haves for, at Kjædebrøken er konvergent, saafremt $\frac{x+b}{2c}$ ikke er mindre end 1, saa vil man dog ved en Prøve se, at det deraf dannede Integral af (82) altid gjælder.

Differentialligningen

$$ky=(x+b)\frac{dy}{dx}-((x+b)^2-4c^2)\frac{d^2y}{dx^2} \tag{82}$$

har for konstante k det fuldstændige Integral

$$y=c_1 \sin\left[\sqrt{k}\, arc\left(\cos=\frac{x+b}{2c}\right)\right]+c_2 \cos\left[\sqrt{k}\, arc\left(\sin=\frac{x+b}{2c}\right)\right]. \tag{83}$$

24. Man kan dernæst i (77) og (78) antage $k=2$ og sætte $-c^2$ for c, saa at Ligningen bliver

$$r(r+1)y=2(x+b)\frac{dy}{dx}+((x+b)^2-c^2)\frac{d^2y}{dx^2} \tag{84}$$

og

$$A_{2p}=(-)^p\frac{r(r-1)(r-2)...(r-2p+2)(r-2p+1)}{2.4...2p.(2r-1)(2r-3)...(2r-2p+1)}c^{2p}.$$

Det algebraisk rationale hele partikulære Integral bliver

$$y=(x+b)^r-\frac{r(r-1)}{2(2r-1)}c^2(x+b)^{r-2}+\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{2.4.(2r-1)(2r-3)}c^4(x+b)^{r-4}-...,$$

som kan udtrykkes ved den af Legendre indførte og af Laplace nøjere undersøgte Kuglefunktion (jfr. Ramus anal. Mechanik Side 88, Heine Handbuch der Kugelfunctionen. Berlin 1861). Denne er nemlig betegnet og defineret ved

$$P^r(x)=\frac{1.3.5...(2r-1)}{1.2.3...r}\left[x^r-\frac{r(r-1)}{2.(2r-1)}x^{r-2}+\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{2.4.(2r-1)(2r-3)}x^{r-4}-\dots\right],$$

saa at man, naar den foranstaaende Koefficient inddrages i den arbitrære Konstant, finder det partikulære Integral af (84)

$$y_1=c_1 P^r\left(\frac{x+b}{c}\right).$$

Den hertil hørende Kjædebrøk faas af (57) for

$$a=\frac{2}{r(r+1)},\quad f=\frac{1}{r(r+1)},\quad g=b=0,\quad h=-\frac{c^2}{r(r+1)},$$

samt med $x+b$ for x, og bliver

$$X=\frac{r(r+1)}{2(x+b)+\frac{((x+b)^2-c^2)(r(r+1)-2)}{4(x+b)}+\frac{((x+b)^2-c^2)(r(r+1)-6)}{6(x+b)+\ldots}}.$$

Den kan i Følge 1 udtrykkes ved den endelige brudne rationale Funktion

$$cr\,\frac{(x+b)^{r-1}-\frac{(r-1)(r-2)}{1.(2r-1)}c^2(x+b)^{r-3}+\frac{(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{1.2.(2r-1)(2r-3)}c^4(x+b)^{r-5}-\ldots}{(x+b)^r-\frac{r(r-1)}{1.(2r-1)}c^2(x+b)^{r-2}+\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{1.2.(2r-1)(2r-3)}c^4(x+b)^{r-4}-\ldots}$$

Integralet af (84) kan faas udtrykt ved det bestemte Integral, hvorved Laplace (méc. cel. t. V liv. XI chap. II) har fremstillet Kuglefunktionen, nemlig

$$P^r(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x-\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^r d\varphi.$$

Optages $\frac{1}{\pi c}$ i det partikulære Integrals konstant, kan man altsaa sætte

$$y_1=c_1\int_0^\pi (x+b-\sqrt{(x+b)^2-c^2}\cos\varphi)^r d\varphi. \tag{85}$$

Ved Prøven af, hvorvidt og i hvilket Omfang dette Integral virkelig tilfredsstiller (84), kan man udelade konstanten. Først findes

$$\frac{dy_1}{dx}=r\int_0^\pi (x+b-\sqrt{(x+b)^2-c^2}\cos\varphi)^{r-1}\left(1-\frac{(x+b)\cos\varphi}{\sqrt{(x+b)^2-c^2}}\right)d\varphi,$$

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=r(r-1)\int_0^\pi (x+b-\sqrt{(x+b)^2-c^2}\cos\varphi)^{r-2}\left(1-\frac{(x+b)\cos\varphi}{\sqrt{(x+b)^2-c^2}}\right)^2 d\varphi$$

$$+r\int_0^\pi (x+b-\sqrt{(x+b)^2-c^2}\cos\varphi)^{r-1}\frac{c^2\cos\varphi}{((x+b)^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}d\varphi.$$

Dernæst samles for sig de Led, som efter disse Størrelsers Indførelse i (84) umiddelbart vise sig med den $(r-1)^{te}$ Potens af Binomiet under Integraltegnet, hvilket med den forkortede Betegnelse $R=\sqrt{(x+b)^2-c^2}$ giver

$$r\int_0^\pi (x+b-R\cos\varphi)^{r-1}\left(2(x+b)-R\cos\varphi-\frac{(x+b)^2\cos\varphi}{R}\right)d\varphi=$$

$$r\int_0^\pi (x+b-R\cos\varphi)^{r-2}\left(2(x+b)^2-3(x+b)R\cos\varphi+2(x+b)^2\cos^2\varphi-c^2\cos^2\varphi-\frac{(x+b)^3\cos\varphi}{R}\right)d\varphi.$$

Fremdeles ville de øvrige Led i y_1 og $\frac{d^2y_1}{dx^2}$ overførte paa samme Side af Ligningen, som de nys nævnte, frembringe

$$r\int_0^\pi (x+b-R\cos\varphi)^{r-2}(-2(x+b)^2+4(x+b)R\cos\varphi-2(x+b)^2\cos^2\varphi-(r-1)c^2+(r+1)c^2\cos^2\varphi)d\varphi.$$

Det endelige Resultat af Substitutionen vil derefter blive

$$u=-c^2r\int_0^\pi (x+b-R\cos\varphi)^{r-2}\left(r-1+\frac{(x+b)\cos\varphi}{R}-r\cos^2\varphi\right)d\varphi,$$

som skal blive nul. Dette viser sig ogsaa paa følgende Maade: for $\cos^2\varphi$ indføres $1-\sin^2\varphi$ og ved delvis Integration finder man

$$\int_0^\pi (x+b-R\cos\varphi)^{r-2}\sin^2\varphi d\varphi=-\frac{1}{(r-1)R}\int_0^\pi (x+b-R\cos\varphi)^{r-1}\cos\varphi d\varphi,$$

ved hvis Indførelse i u man efter nogen Reduktion faar

$$u=\frac{c^2r}{r-1}\int_0^\pi (x+b-R\cos\varphi)^{r-2}\left(r-1+\frac{(x+b)\cos\varphi}{R}-r\cos^2\varphi\right)d\varphi=\frac{c^2r}{r-1}u,$$

følgelig

$$u=0.$$

Skjønt Prøven viser, at Rodstørrelsen R kunde have det modsatte Fortegn, uden at Integralet hører op at gjælde, har man dog ikke to partikulære Integraler; thi $P(x)$ er en hel rational Funktion af x, som maa blive uafhængig af $\sqrt{x^2-1}$, ligesom man ogsaa ved i (85) at anvende Binomialformlen og derpaa integrere vilde faa alle Potenser af $\cos\varphi$ med ulige Exponenter til at forsvinde, og dermed gaar Rodstørrelsen ogsaa bort. Men Prøven giver den vigtigere Oplysning, at der ikke behøves nogen anden Indskrænkning med Hensyn til Værdien af r, end at denne Størrelse ikke tør være 1, en Indskrænkning, som er ganske uden Betydning, fordi der dertil svarer det ganske simple Integral $y=x+b$, som forresten ogsaa faas af (85).

Er nu r vilkaarlig, saa kan (84) og (85) omskrives, idet man sætter

$$r(r+1)=k,$$

hvor k er hvilkensomhelst. Deraf findes

$$r=\frac{-1\pm\sqrt{1+4k}}{2},$$

hvilke begge kunne bruges i det partikulære Integral; men det er ikke der-

med afgjort, at de ere forskjellige. I Følge en af Jacobi (Crelles Journ. 15. B.) angiven Ændring kan (84) faa en anden Form, der tjener til at afgjøre dette Spørgsmaal. Sættes nemlig

$$\cos\varphi = \frac{(x+b)\cos\psi + \sqrt{(x+b)^2 - c^2}}{x+b+\cos\psi\sqrt{(x+b)^2-c^2}},$$

faar man

$$\sin\varphi = \frac{c\sin\psi}{x+b+\cos\psi\sqrt{(x+b)^2-c^2}},$$

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{1}{x+b+\cos\psi\sqrt{(x+b)^2-c^2}},$$

og

$$x+b-\cos\varphi\sqrt{(x+b)^2-c^2} = \frac{c^2}{x+b+\cos\psi\sqrt{(x+b)^2-c^2}}.$$

Fremdeles, for at finde Grænserne for Integrationen med Hensyn til ψ, bemærkes, at baade $\varphi=0$ og $\varphi=\pi$ giver $\sin\psi=0$, men $\cos\psi=\pm 1$; den laveste Grænse kan altsaa være 0, den højeste et ulige Multiplum af π. Men da $\sin\varphi$ ikke kan blive nul i det forelagte Interval, gjælder det samme om $\sin\psi$, saa at den højeste Grænse alene kan være π. Man faar da, idet atter φ bruges for ψ som uafhængig variabel,

$$y_1 = c_1 \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(x+b+\sqrt{(x+b)^2-c^2}\cos\varphi)^{r+1}},$$

hvilket dog ogsaa kan faas med negativt Tegn foran Rodstørrelsen, saa at der kan faas to Integraler af Formen (85), hvis Exponenters Sum er -1, men i Følge deres Dannelsesmaade kunne de ikke være forskjellige. Det andet partikulære Integral af (84), der som bekjendt er en Kuglefunktion af anden Art, lader sig altsaa ikke fremstille ved den brugte Kjædebrøk (jfr. om alt dette Heine, Handbuch der Kugelfunct. S. 14, 15 og 55).

Differentialligningen

$$ky = 2(x+b)\frac{dy}{dx} + ((x+b)^2 - c^2)\frac{d^2y}{dx^2}, \tag{86}$$

hvor k er hvilkensomhelst konstant, har det partikulære Integral

$$y_1 = c_1 \int_0^\pi (x+b-\sqrt{(x+b)^2-c^2}\cos\varphi)^{\frac{-1+\sqrt{1+4k}}{2}} d\varphi. \qquad (87)$$

25. Fremdeles behandles (77) og (78) for $k=3$ og med $-4c^2$ for c, saa at

$$r(r+2)y = 3(x+b)\frac{dy}{dx} + ((x+b)^2-4c^2)\frac{d^2y}{dx^2}, \qquad (88)$$

$$A_{2p} = (-1)^p \frac{(r-p)(r-p+1)\ldots(r-2p+1)}{1.2\ldots p} c^{2p},$$

$$y = (x+b)^r - \frac{r-1}{1}c^2(x+b)^{r-2} + \frac{(r-2)(r-3)}{1.2}c^4(x+b)^{r-4} - \frac{(r-3)(r-4)(r-5)}{1.2.3.}c^6(x+b)^{r-6} + \ldots$$

Betegnes denne hele rationale Funktion for et Øjeblik med u_r, saa vil man let finde Differensligningen

$$u_{r+2} - (x+b)u_{r+1} + c^2 u_r = 0$$

derfor. Integration heraf ved Kjædebrøk i Følge Laplace (jfr. Ramus Diff. & Integralregn. S. 366) giver

$$\frac{u_{r+1}}{u_r} = \cfrac{c^2}{x+b-\cfrac{c^2}{x+b-\cfrac{c^2}{x+b-\ldots}}} = \frac{x+b\pm\sqrt{(x+b)^2-4c^2}}{2},$$

og deraf findes igjen

$$u_r = y = A\left(\frac{x+b+\sqrt{(x+b)^2-4c^2}}{2}\right)^r + B\left(\frac{x+b-\sqrt{(x+b)^2-4c^2}}{2}\right)^r.$$

Til Bestemmelse af konstanterne A og B har man $u_0=1$, $u_1=x+b$, altsaa

$$A+B=1,$$

$$(A+B)\frac{x+b}{2} + (A-B)\frac{R}{2} = x+b,$$

idet man for Kortheds Skyld sætter

$$R = \sqrt{(x+b)^2-4c^2}.$$

Man faar da

$$A = \frac{x+b+R}{2R}, \quad B = -\frac{x+b-R}{2R},$$

følgelig

$$y=\frac{(x+b+R)^{r+1}-(x+b-R)^{r+1}}{2^{r+1}R}.$$

Prøver man dette Integral, skal man, idet

$$\frac{dR}{dx}=\frac{x+b}{R},\quad 1\pm\frac{dR}{dx}=\pm\frac{x+b\pm R}{R},$$

hvor de øverste Fortegn høre sammen, indsætte

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(r+1)[(x+b+R)^{r+1}+(x+b-R)^{r+1}]}{2^{r+1}R^2}-\frac{(x+b)y}{R^2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(r+1)^2y}{R^2}-\frac{3(r+1)(x+b)[(x+b+R)^{r+1}+(x+b-R)^{r+1}]}{2^{r+1}R^4}-\frac{y}{R^2}+\frac{3(x+b)^2y}{R^4}.$$

Men saa ville de to Led, som ikke indeholde y, blive ligestore med modsatte Tegn, og de andre faa y multipliceret med

$$r(r+2)+\frac{3(x+b)^2}{R^2}-(r+1)^2+1-\frac{3(x+b)^2}{R^2}=0.$$

Denne Prøve godtgjør altsaa ikke blot Rigtigheden af Integralet for positive hele r, men for hvilkesomhelst r, alene $r=-1$ undtagen. Sætter man derfor

$$r(r+2)=k,$$

altsaa

$$r+1=\pm\sqrt{1+k},$$

hvor $k=-1$ giver $r=-1$, saa er derved Exponenten i det partikulære Integral udtrykt ved k. Men af den dobbelte Værdi tør man ikke slutte til to partikulære Integraler, fordi

$$(x+b\pm R)^{-\sqrt{1+k}}=\left(\frac{x+b\mp R}{4c^2}\right)^{\sqrt{1+k}},$$

saa at Forandring af Exponentens Fortegn alene medfører Forandring i den arbitrære konstant.

Differentialligningen

$$ky=3(x+b)\frac{dy}{dx}+((x+b)^2-4c^2)\frac{d^2y}{dx^2} \tag{88}$$

har for konstante k, forskjellige fra -1, det partikulære Integral

$$y_1=c_1\,\frac{(x+b+\sqrt{(x+b)^2-4c^2})^{\sqrt{1+k}}-(x+b-\sqrt{(x+b)^2-4c^2})^{\sqrt{1+k}}}{\sqrt{(x+b)^2-4c^2}}. \quad (89)$$

26. Naar i (88) $k=-1$, ophører (89) at gjælde derved, at Tælleren bliver nul, hvoraf dog ikke tør sluttes at $y=0$, eftersom konstanten c_1 maa være Funktion af k (jfr. ovenfor den udeladte Divisor $2^{r+1}=2^{\sqrt{1+k}}$). Det kunde altsaa være muligt, at $k=-1$ gjorde $c_1=\infty$, y_1 ubestemt, uden at man dog har Midler til Bestemmelse af den sande Værdi. Men netop fordi Ubestemtheden opstaar i Forbindelse med Exponenten $r+1=0$, er der Grund til at forsøge, om ikke her en logarithmisk Funktion skal bruges istedenfor en Potens (jfr. $\int x^m dx$ for $m=-1$, som det er bestemt i min Diff. og Integralregn. Side 120). Derfor prøves

$$y_1=\frac{l.(x+b+R)-l.(x+b-R)}{R},$$

som giver

$$\frac{dy_1}{dx}=\frac{2}{R^2}-\frac{(x+b)y_1}{R^2},$$

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=-\frac{6(x+b)}{R^4}+\frac{3(x+b)^2y_1}{R^4}-\frac{y_1}{R^2},$$

og saaledes virkelig gjør (88) for $k=-1$ identisk lig nul.

Differentialligningen

$$-y=3(x+b)\frac{dy}{dx}+((x+b)^2-4c^2)\frac{d^2y}{dx^2} \quad (90)$$

har det partikulære Integral

$$y_1=c_1\,\frac{l.(x+b+\sqrt{(x+b)^2-4c^2})-l.(x+b-\sqrt{(x+b)^2-4c^2})}{\sqrt{(x+b)^2-4c^2}}. \quad (91)$$

27. Den almindelige Integration af (77) for positive hele r afhænger, som vist i 21, af et helt rationalt Polynomium i $(x+b)$ af r^{te} Grad, men kan ogsaa udtrykkes ved de i det foregaaende for $k=2$ og $k=1$ benyttede Funktioner (jfr. henholdsvis 24 og 21). Man kan nemlig sætte

$$P(r,k,x)=\frac{1.3.5\ldots(2r-1)}{1.2.3\ldots r}\left[x^r-\frac{r(r-1)}{1.(k+2r-3)}x^{r-2}+\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{1.2.(k+2r-5)(k+2r-3)}x^{r-4}-\ldots\right],$$

hvor den foranstaaende Faktor er tilføjet, for at man ligefrem kan have

$$P(r,2,x)=P^r(x),$$

og overbeviser sig da let om, at

$$\frac{d.P(r,k,x)}{dx}=(2r-1)P(r-1,k+2,x) \text{ og } \int P(r,k,x)dx=\frac{1}{2r+1}P(r+1,k-2,x),$$

saa at hver Differentiation gjør r 1 mindre, k 2 større, omvendt hver Integration gjør r 1 større, k 2 mindre. Hvis altsaa $k=2q$, hvor q er positiv hel, saa er

$$\int^{q-1} P(r,2q,x)dx^{q-1}=\frac{1}{(2r+1)(2r+3)...(2r+2q-1)}P(r+q-1,2,x)=$$
$$\frac{1}{(2r+1)(2r+3)...(2r+2q-1)}P^{r+q-1}(x)$$

eller

$$P(r,2q,x)=\frac{1}{(2r+1)(2r+3)...(2r+2q-1)}\frac{d.^{q-1}P^{r+q-1}(x)}{dx^{q-1}}.$$

Fremdeles i Følge 22 er

$$P(r,1,x)=\frac{1.3.5...(2r-1)}{1.2.3...r}[(x+b+R)^r+(x+b-R)^r],$$

saa at $k=2q+1$ giver først

$$\int^q P(r,2q+1,x)dx^q=\frac{1}{(2r+1)(2r+3)...(2r+2q+1)}P.(r+q,1,x)$$

og dernæst

$$P(r,2q+1,x)=\frac{1}{(2r+1)(2r+3)...(2r+2q+1)}\cdot\frac{1.3...(2r-1)}{1.2...r}\frac{d^q.[(x+b+R)^{r+q}+(x+b-R)^{r+q}]}{dx^q}.$$

Hvis man nu i det partikulære Integral af (77), saaledes som det faas i Følge 21, sætter $k=2q$ og $-2c^2$ for c, saa faar man, idet $\frac{d.\frac{x+b}{c}}{dx}=\frac{1}{c}$ alene virker paa konstanten,

$$y_1=c_1P\left((r,2q,\frac{x+b}{c}\right)=C_1\frac{d^{q-1}P^{r+q-1}\left(\frac{x+b}{c}\right)}{dx^{q-1}}.$$

Ligeledes $k=2q+1$ og $-4c^2$ for c giver

$$y_1=c_1P\left(r,2q+1,\frac{x+b}{c}\right)=C_1\frac{d^qP\left(r+q,1,\frac{x+b}{c}\right)}{dx^q}.$$

Men derhos kan bemærkes, at de foregaaende Integraler gjælde uden Hensyn til Beskaffenheden af r, alene $r=-1$ undtagen, og derfor indføres for Kuglefunktionen det bestemte Integral, som er brugt i (87)

Differentialligningen

$$k(k+2q-1)y=2q(x+b)\frac{dy}{dx}+((x+b)^2-2c^2)\frac{d^2y}{dx^2}, \tag{92}$$

hvor q er positiv hel, har det partikulære Integral

$$y_1=c_1\frac{d.^{q-1}\int_0^\pi(x+b-\sqrt{(x+b)^2-2c^2\cos\varphi})^{k+q-1}d\varphi.}{dx^{q-1}}. \tag{93}$$

Differentialligningen

$$k(k+2q)y=(2q+1)(x+b)\frac{dy}{dx}+((x+b)^2-4c^2)\frac{d^2y}{dx^2} \tag{94}$$

har for positive hele q det partikulære Integral

$$y_1=c_1\frac{d.^q((x+b+\sqrt{(x+b)^2-4c^2})^{k+q}+(x+b-\sqrt{(x+b)^2-4c^2})^{k+q})}{dx^q}. \tag{95}$$

28. De ved (93) og (95) angivne Integrationer gjælde ikke for henholdsvis $k=-(q-1)$ og $k=-q$; men det har ingen Vanskelighed at integrere de tilsvarende Former af (92) og (94) paa anden Maade.

For $k=-(q-1)$ bliver (92) til

$$-(q-1)qy=2q(x+b)\frac{dy}{dx}+((x+b)^2-2c^2)\frac{d^2y}{dx^2}, \tag{96}$$

og naar heri sættes $q=1$, faas

$$0=2(x+b)\frac{dy}{dx}+((x+b)^2-2c^2)\frac{d^2y}{dx^2}, \tag{97}$$

altsaa

$$\frac{dy}{dx}=\frac{c_1}{(x+b)^2-2c^2},$$

saa at

$$y_1=c_1 l.\sqrt{\frac{x+b-c\sqrt{2}}{x+b+c\sqrt{2}}}$$

er det ene partikulære Integral af (97). Ved $q-1$ Differentiationer af (97) faar man (96), altsaa

Differentialligningen

$$-(q-1)qy=2q(x+b)\frac{dy}{dx}+((x+b)^2-2c^2)\frac{d^2y}{dx^2}, \qquad (96)$$

hvor q er positiv hel, har det partikulære Integral

$$y_1=c_1\frac{d^{q-1}.}{dx^{q-1}}\,l.\sqrt{\frac{x+b-c\sqrt{2}}{x+b+c\sqrt{2}}}. \qquad (98)$$

For $k=-q$ bliver (94) til

$$-q^2y=(2q+1)(x+b)\frac{dy}{dx}+((x+b)^2-4c^2)\frac{d^2y}{dx^2}. \qquad (99)$$

Denne Ligning er for $q=0$

$$0=(x+b)\frac{dy}{dx}+((x+b)^2-4c^2)\frac{d^2y}{dx^2}, \qquad (100)$$

som integreres ved

$$\frac{dy}{dx}=\frac{c_1}{\sqrt{(x+b)^2-4c^2}},$$

altsaa har det partikulære Integral

$$y_1=c_1\,l.(x+b+\sqrt{(x+b)^2-4c^2}).$$

Men q Differentiationer af (100) frembringe netop (99), saa at

Differentialligningen

$$-q^2y=(2q+1)(x+b)\frac{dy}{dx}+((x+b)^2-4c^2)\frac{d^2y}{dx^2} \qquad (99)$$

med positive, hele q har det partikulære Integral

$$y_1=c_1\frac{d^q.l.(x+b+\sqrt{(x+b)^2-4c^2})}{dx^q}. \qquad (101)$$

---

§ 3. Indirekte Anvendelser.

29. De foregaaende Anvendelser af den i 1—3 givne Theori ere alle direkte; ved Dannelse af den til den forelagte Differentialligning svarende Kjædebrøk er man kommet til Integralet, enten partikulært eller fuldstæn-

digt, i en mere eller mindre bekvem Form. Men i de fleste andre Tilfælde ville vistnok Differentialligningernes tilsvarende Kjædebrøker blive af en altfor sammensat Form. Derimod er det ofte muligt at ændre forelagte Ligninger saaledes, at deres Integration beror paa de i det foregaaende fundne Resultater. Herhid høre nogle vel bekjendte Differentialligninger, hvis Integration er funden; men det er ogsaa muligt at tilføje andre, som formentlig ikke forhen ere integrerede.

Har man

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{a}{bx+c}\frac{dy}{dx}+y=0,$$

saa kan en Ændring af den uafhængige variable, hvorved

$$-(bx+c)^2=bt$$

føre til Maalet. Man faar nemlig deraf

$$\frac{dy}{dx}=-2(bx+c)\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-2b\frac{dy}{dt}+4(bx+c)^2\frac{d^2y}{dt^2},$$

følgelig

$$y=2(a+b)\frac{dy}{dt}+4bt\frac{d^2y}{dt^2},$$

hvis partikulære Integral er fundet i (13) udtrykt ved en Besselsk Funktion. Man skal i (42) sætte $2(a+b)$ for a, $4bt$ for $bx+c$, $4b$ for b; forandrer man tillige t til $\frac{-(bx+c)^2}{b}$, vil man se, at

Differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{a}{bx+c}\frac{dy}{dx}+y=0 \tag{102}$$

har det partikulære Integral

$$y_1=c_1\left(\frac{bx+c}{2b}\right)^{-\frac{a-b}{2b}}J^{\frac{a-b}{2b}}\left(\frac{bx+c}{2b}\right). \tag{103}$$

$b=1$, $c=0$ giver for

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{a}{x}\frac{dy}{dx}+y=0$$

Integralet

$$y_1 = c_1 \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{a-1}{2}} J^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Mere almindelig vil

$$A(bx+c)^{m+1}\frac{d^2y}{dx^2}+B(bx+c)^m\frac{dy}{dx}+y=0,$$

saafremt ikke $m=1$, kunne ændres ved at indføre den uafhængige variable t, bestemt ved

$$-(bx+c)^{-(m-1)}=bt.$$

Man faar nemlig deraf

$$\frac{dy}{dx}=(m-1)(bx+c)^{-m}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-m(m-1)\,b(bx+c)^{-m-1}\frac{dy}{dt}+(m-1)^2(bx+c)^{-2m}\frac{d^2y}{dt^2},$$

altsaa bliver den forelagte Ligning til

$$y=(m-1)(mbA-B)\frac{dy}{dt}+(m-1)^2\,bAt\,\frac{d^2y}{dt^2},$$

som har Formen (24). For at danne dennes partikulære Integral udtrykt ved den Besselske Funktion, indsættes $(m-1)(mbA-B)$ for a, $(m-1)^2bA$ for b, 0 for c og t for x; men naar derefter atter gjøres

$$t=-\frac{(bx+c)^{-(m-1)}}{b}$$

og for Kortheds Skyld sættes

$$\frac{(mbA-B)}{(m-1)\,bA}=\alpha,$$

vil man se, at

Differentialligningen

$$A(bx+c)^{m+1}\frac{d^2y}{dx^2}+B(bx+c)^m\frac{dy}{dx}+y=0 \qquad (104)$$

har, naar m ikke er 1, det partikulære Integral

$$y_1=c_1\left(\frac{(bx+c)^{-\frac{m-1}{2}}}{(m-1)bA^{\frac{1}{2}}}\right)^{-(\alpha-1)} J^{\alpha-1}\left(\frac{(bx+c)^{-\frac{m-1}{2}}}{(m-1)\,bA^{\frac{1}{2}}}\right). \qquad (105)$$

Sætter man dernæst i (104) $c=1$, $b=\frac{p}{m}$ og derefter $m=\infty$, faar man

$$Ae^{px}\frac{d^2y}{dx^2}+Be^{px}\frac{dy}{dx}+y=0.$$

Indføres deri den uafhængige variable t saaledes bestemt,

$$-e^{-px}=pt,$$

bliver Ligningen af Formen (24), nemlig

$$y=(Ap-B)\frac{dy}{dt}+Apt\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Nu maa der i (42) sættes $a=Ap-B$, $b=Ap$, $c=0$, $x=t$ og derefter igjen $t=-\frac{e^{-px}}{p}$. Altsaa

Differentialligningen

$$Ae^{px}\frac{d^2y}{dx^2}+Be^{px}\frac{dy}{dx}+y=0 \qquad (106)$$

har det partikulære Integral

$$y_1=c_1\left(\frac{e^{-px}}{p^2A}\right)^{\frac{B}{2Ap}}J^{\frac{B}{Ap}}\left(\sqrt{\frac{e^{-px}}{p^2A}}\right). \qquad (107)$$

Endelig bemærkes, hvad forresten ogsaa ses i Carl Neumanns Theorie der Besselschen Functionen Side 53, at den Besselske Differentialligning

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0$$

(jfr. Bessels forhen nævnte Afh. Side 34) ved Substitutionen

$$y=x^n u$$

bringes paa Formen

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{2n+1}{x}\frac{du}{dx}+u=0,$$

indbefattet i (102). Sættes altsaa i (103) $a=2n+1$, $b=1$, $c=0$, faar man efter Multiplikation med x^n og Optagelse af 2^n i konstanten

$$y_1=c_1J^n\left(\frac{x}{2}\right).$$

Hos Bessel er den uafhængige variable under Funktionstegnet x; Forskjellen er forklaret i 13.

30. En anden Klasse af Differentialligninger, hvis Integration afhænger af de forhen direkte integrerede, er

$$x^3\frac{d^2y}{dx^2}-(Ax^2+B)\frac{dy}{dx}=kxy.$$

Sætter man nemlig

$$x^2=t,\ \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}.2x,\ \frac{d^2y}{dx^2}=2\frac{dy}{dt}+4x^2\frac{d^2y}{dt^2},$$

faas efter Division med $4x$ og Indførelse af t for x^2

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}-\left(\frac{A-1}{2}t+\frac{B}{2}\right)\frac{dy}{dt}=\frac{k}{4}y,$$

som har den i 18 behandlede Form. For visse specielle Værdier af konstanterne faas forskjellige af de i det foregaaende behandlede Tilfælde. Saaledes vil denne Ligning blive (79), naar $A=-1$, $B=0$, saa at man finder det fuldstændige Integral af (80), naar $\frac{k}{4}$ sættes for k, 0 for $-4c^2$ og $t=x^2$ for $x+b$. Paa lignende Maade kunne andre Værdier af konstanterne føre for Ex. til de i 24 og 25 behandlede Tilfælde.

Ligeledes vil

$$x(x^4+a^4)\frac{d^2y}{dx^2}-(x^4-b^2x^2+a^4)\frac{dy}{dx}=kx^3y$$

ved den samme Ændring af den uafhængige Variable give efter al mulig Reduktion

$$y=\frac{2b^2}{k}\frac{dy}{dt}+\left(\frac{4}{k}t^2+\frac{4a^4}{k}\right)\frac{d^2y}{dt^2},$$

som falder ind under (58), hvis deri $a=0$, $k=4r(r+1)$, r positiv hel, saa at Integrationen kan udføres ved Hjælp af (63).

Prisafhandlingerne

for Aaret 1871—72.

De i forrige Aar udsatte Prisopgaver have fremkaldt fem Besvarelser, nemlig den retsvidenskabelige to, den lægevidenskabelige en, den i klassisk Philologi en og den naturhistoriske en.

Derover ere nedenstaaende Bedømmelser afgivne.

I. Den retsvidenskabelige Afhandling.

Til Besvarelse af den i 1871 udsatte Prisopgave: „Der ønskes en Udvikling af den danske Rets Regler om begge Ægtefællers Stilling saavel under Ægteskabet som efter sammes Ophør til de af dem før eller under Ægteskabet stiftede Gjældsforpligtelser“, er der indkommen to Afhandlinger, den ene med Motto: „Manden er Boets Værge“, den anden uden Motto.

Den første af disse Afhandlinger mangler Klarhed og Skarphed i Fremstillingen, forbigaar flere vigtige under Opgaven faldende Spørgsmaal og bærer i det hele tydelige Spor af, at Forf., som han selv i en Efterskrift meddeler, ikke har kunnet give sig den fornødne Tid til Afhandlingens Udarbeidelse. Vi anse den derfor ikke for værdig til den akademiske Belønning.

Den sidste af Afhandlingerne indeholder flere gode Bemærkninger navnlig ved Kritiken af de forskjellige i Litteraturen fremsatte Anskuelser

og giver en velordnet og i det væsentlige udtømmende Fremstilling af det opgivne Emne, hvorhos Domssamlingerne ere flittigt benyttede. Men Forf.s Arbeide lider af den Hovedfeil, at Udgangspunktet, som selvfølgelig maa være Undersøgelsen af det ægteskabelige Formuefællesskab efter den positive Rets Ordning, er altfor let og overfladisk behandlet, hvilket ogsaa har medført, at der er tillagt de almindelige formueretlige Principer en for stor Betydning. Da derhos enkelte Partier ere ganske mislykkede, til Ex. Udviklingen af Forholdet, naar den længstlevende Ægtefælle hensidder i uskiftet Bo, hvortil kommer, at Fremstillingen indeholder ikke faa positive Urigtigheder og paa flere Steder er uklar, kunne vi heller ikke anse denne Afhandling for værdig til nogen akademisk Belønning.

Det juridiske Fakultet den 24de Marts 1873.

J. Nellemann. *Goos.* *H. Matzen.* *Deuntzer.* *A. C. Evaldsen.*

II. Den lægevidenskabelige Afhandling.

Som Besvarelse af Universitetets Prisopgave: „En Fremstilling af den nyere Tids Anskuelser om Planteparasiterne nærmest med Hensyn til Sammenhængen mellem dem og de saakaldte zymotiske Sygdomme hos Mennesket“, er der indleveret en Afhandling med Motto: „Cet agent est visible et palpable, c'est un être organisé, doué de vie, qui se développe et se propage à la manière des êtres vivants. Davaine.“

Opgaven fordrer Spørgsmaalet om Planteparasiterne behandlet nærmest med Hensyn til de zymotiske Sygdomme, men denne Fordring har Forfatteren langtfra gjort Fyldest. I det første og større Afsnit af Afhandlingen behandler han alle de hos Mennesket forekommende Planteparasiter, i det andet og mindre derimod de Planteformer, der ere satte i ætiologisk Forhold til de zymotiske Sygdomme. Den første, efter Opgaven mindre væsenlige Del af Afhandlingen fordyber sig helt igjennem i tildels overflødige Detailspørgsmaal, medens den anden, den væsenligste Del, har faaet en noget stedmoderlig Behandling. Man savner nemlig her for det første en almindelig Fremstilling af de mange Forhold, der kunne pege hen paa Planteparasiters Betydning for Infektionssygdommene og deres Udvikling, f. Ex. disse Sygdommes geografiske Udbredning, deres Incubation o. m. a. Man savner for

det andet under den specielle Behandling af de enkelte Sygdomme visse Momenter, som enten ere forbigaaede eller kun let berørte, saaledes de nyere Anskuelser om den septisk pyæmiske Infektion, om Luftens Indvirkning paa Saarflader, om visse Hospitalssygdommes Forhold til Planteparasiter. Hertil kommer, at Stoffets Behandling ofte lader endel tilbage at ønske; Forfatteren er tilbøjelig til en langtrukken og trættende Kritik, selv hvor Kritik efter tidligere Arbejder neppe længer er nødvendig. Ogsaa mod Sproget kan der gjøres enkelte Indvendinger, navnlig mod en ret hyppig uskjøn Pathos.

Trods de fremhævede Mangler maa det dog erkjendes, at Afhandlingen i flere Retninger har en ikke ringe Fortjeneste. Den vidner ikke blot om stor Flid og en ikke ringe kritisk Sands, men om en ofte meget heldig Bestræbelse efter at trænge tilbunds i de Sider af Spørgsmaalet, som behandles i Afhandlingen. Og der er neppe nogen Tvivl om, at Forfatteren med den Dygtighed, som han viser sig at være i Besiddelse af, vilde have kunnet løse Spørgsmaalet med Held, hvis han fra Begyndelsen af havde arbejdet efter en rigtigere Plan.

Skjøndt vi efter det Foregaaende ikke kunne indstille Forfatteren til at erholde Universitetets Guldmedaille, mene vi dog, at han ved sit Arbejde har gjort sig fortjent til en Paaskjønnelse som en Opmuntring til fortsat videnskabelig Virksomhed, og vi indstille ham derfor til et hæderligt Accessit.

Kjøbenhavn, den 20de Marts 1873.

With. *Reisz.* *C. G. Gædeken.*

Ved Navnesedlens Aabning fandtes Forfatteren at være stud. med. & chir. Johannes L. Mygge.

III. Afhandlingen i klassisk Philologi.

I klassisk Philologi udsattes ifjor som Opgave „en kritisk og exegetisk Behandling af L. Senecas Skrift de tranquillitate animi med særligt Hensyn til Senecas og hans Tidsalders Sprogbrug i dens Afvigelse fra den ældre“.

Denne Opgave har fundet en Bearbejder, der som Mærke har brugt Senecas Ord: „Qui tranquille volet vivere, nec privatim agat multa, nec publice". Det omfangsrige Arbejde bærer Præg af meget stor Flid og et saare omhyggeligt Studium af alle Senecas Skrifter og tillige af ikke ringe egen, med sproglig Iagttagelse forbunden Læsning i den ældre og i den samtidige romerske Litteratur. Det lader sig næppe nægte, at Forfatteren har opfattet Opgaven noget ensidig og derfor altfor overvejende, og stundom noget minutiøst, idet han har grebet temmelig fjernt liggende Anledninger, har kastet sig over og i Detail forfulgt Sammenligningen mellem Guldalderens og Sølvalderens Sprogbrug i grammatisk og lexikalsk Retning, og derved saa meget har tilbagetrængt de andre Sider af Commentaren, at der savnes Ligevægt, uagtet enkelte til den historisk-antiqvariske Fortolkning hørende Punkter ere behandlede fyldigt og selvstændigt. Ogsaa den kritiske Behandling lader Noget tilbage at ønske med Hensyn til forsigtig Prøvelse af den nyeste Text og Sammenholden af den med det foreliggende Apparat, saa at man undertiden undres over, at Forfatteren har kunnet overse Haandskrifternes bestemte Vidnesbyrd. Men i det Hele røber Arbejdet saa megen ikke blot Flid, men ogsaa Dygtighed og Iagttagelsesevne, at vi vilde anse det for ubilligt ikke at tilkjende Forfatteren Prisen.

Den 22de Marts 1873.

J. N. Madvig. *I. L. Ussing.*

Ved Navnesedlens Aabning fandtes Forfatteren at være H. M. Gemzøe, Adjunkt i Randers. Da han var kongelig Embedsmand paa den Tid, da Afhandlingen indleveredes, kan han imidlertid ikke oppebære Prisen.

IV. Den naturhistoriske Afhandling.

Som Besvarelse af den i 1871 udsatte Prisopgave i Naturhistorie: „En systematisk kritisk Fremstilling af alle i en større naturlig begrændset Del af Danmark forekommende Arter af Desmidiaceernes Familie", er der indkommen en Afhandling, ledsaget af 6 Tavler og en større Kasse med Præparater, bærende Mottoet: Some err in staying, more in going, but Going may lead to the truth.

Denne Afhandling vidner om, at Forfatteren med megen Flid, Iver og Udholdenhed har afsøgt et stort Areal af Danmark, idet han foruden Thyland, der udgjør Hovedpunktet for hans Undersøgelser, ogsaa har udstrakt disse til flere andre Partier Nord for Limfjorden, f. Ex. Hanherred og Vendsyssel, og ligesaa Syd for denne til Punkter i Egnen af Rold, Hald, Silkeborg, Herning, Strækningen mellem Blaavandshuk og Filsø, mellem Varde og Vejle osv. samt til Øerne Fanø, Anholt og Læssø og det nordlige Sjælland. Om end dette har ført Forfatteren bort fra noget af det, der tillige maatte være Formaal for den stillede Opgave, kan det paa den anden Side ikke nægtes, at han ved det fra saa mange forskjellige Egne samlede Materiale er bleven sat bedre istand til baade at opfatte Grændserne for Artsbegrebet hos Desmidiaceerne og at identificere de i Danmark forefundne med dem, der ere beskrevne fra andre Lande. Det er lykkedes ham at paavise et meget betydeligt Antal Arter, der hidtil ikke vare i Literaturen optagne som danske, og disse Arter har han paa en tilstrækkelig Maade betegnet ved Henvisninger til fremmede Forfattere og tildels ved originale Figurer, ligesom han ogsaa har fremsendt et betydeligt Antal Individer fra alle de undersøgte Vande opbevarede i Spiritus. Uagtet disse fremsendte Prøver ikke vare fra Forfatterens Haand lagte til Rede paa en Maade, saa at den nødvendige Kontrol har kunnet udføres uden betydeligt Arbejde med Mikroskopet, og uagtet Afhandlingen selv er særlig ordknap ikke blot i den af Opgaven fordrede Artskritik, men ogsaa i Fremstillingen af nogle af dens foruddskikkede almindelige Synspunkter, saa at Bedømmelsen ikke har været ganske uden Vanskeligheder, maa vi dog anse Besvarelsen for saa tilfredsstillende, at den udsatte Pris, efter vor Mening, bør tilkjendes Forfatteren.

Kjøbenhavn den 24de Marts 1873.

Japetus Steenstrup. *Fr. Johnstrup.* *F. Didrichsen.*

Afhandlingens Forfatter var efter Navnesedlen cand. phil. J. P. Jacobsen.

Anm. Afhandlingerne og de ikke aabnede Navnesedler kunne afhentes hos Universitetets Rektor.

Universitetets Prisspørgsmaal

for Aaret 1872—73.

---

1. I THEOLOGI.

At fremstille og udvikle det gamle Testamentes Lære om Syndens Begreb og Væsen.

2. I LOVKYNDIGHED.

Læren om Straffetilregnelsen efter den forbryderske Villies forskjellige Fremtrædelsesformer udvikles efter almindelige Retsgrundsætninger og dansk Ret.

3. I STATSVIDENSKAB.

Der ønskes en kritisk Vurdering af John Stuart Mills Ejendommelighed og Betydning som økonomisk Forfatter.

4. I LÆGEVIDENSKAB.

En Fremstilling af de chirurgiske Behandlingsmaader, som kunne henføres til den antiseptiske Methode, særlig med Hensyn til Amputationer.

5. I PHILOSOPHI.

Med Henblik paa de i Philosophiens Historie foreliggende Theorier at undersøge, hvorvidt en rationelt udtømmende Begrundelse af det moralske Onde er mulig.

6. I HISTORIE.

Kirkeforsamlingen i Basel vakte i den latinske Christenhed Haabet om en Reform i Retning af Frihed for de nationale Kirker og Lettelse af de Byrder, den romerske Kurie havde lagt paa Folkene. Der ønskes en Skildring af denne Kirkeforsamling med særlig Paavisning af Aarsagerne til, at Reformen efter en heldig Begyndelse dog tilsidst mislykkedes.

7. I KLASSISK PHILOLOGI.

Siciliæ status qualis a Strabone describitur cum conditione ejus, quæ fuit Ciceronis tempore, comparetur.

Sammenligning af Strabos Skildring af Sicilien med Ciceros Fremstilling af Øens Tilstand.

8. I ØSTERLANDSK PHILOLOGI.

At fremstille de forskjellige Maader, paa hvilke en Negation udtrykkes i Arabisk, og dermed at sammenligne hvad der maatte findes tilsvarende i Hebraisk.

9. I MATHEMATIK OG ASTRONOMI.

Paa Grundlag af Jacobis Formler for en materiel Partikels Bevægelse paa en Omdrejningsflade udvikles Lovene for det koniske Penduls Svingninger ved de simplest mulige Formler og med den størst mulige Anskuelighed.

10. I PHYSIK OG CHEMI.

Der fordres en historisk Fremstilling af de experimentale og theoretiske Undersøgelser, ved hvilke man i dette Aarhundredes Begyndelse blev ledet til at opgive Emanationstheorien og antage Bølgetheorien.

11. I NATURHISTORIE.

Der ønskes en faunistisk Monographi af en Dam, en Sø, et Vandløb eller en anden mere eller mindre begrændset Ferskvandsmasse, med Hensyn til det deri forekommende Dyreliv og navnlig det Gjensidigheds- eller Af-

hængighedsforhold, hvori Dyrene staa til hinanden indbyrdes eller til Omgivelserne. Besvarelserne maa ledsages af de til Fremstillingen nødvendige Bilag af Dyr (i Spiritus eller tørrede) og Tegninger.

Anm. Besvarelserne af Opgaven i den klassiske Philologi skulle affattes paa Latin; til alle de øvrige benyttes enten det danske eller det latinske Sprog, efter Forfatterens frie Valg. Afhandlingerne maa indsendes til Universitetets Rektor inden den 1ste December 1873, med Undtagelse af Besvarelserne af den naturhistoriske Opgave, til hvis Indlevering Tiden staar aaben indtil 1ste December 1874. Adgangen til at vinde Prismedaillen er ikke længere indskrænket til akademiske Borgere og ubefordrede Kandidater, som ikke staa i noget offentligt eller andet Embede, men staar aaben for Enhver, som uden at have opnaaet fast kongelig Ansættelse paa den Tid, Prisopgaven besvares, maatte føle sig opfordret til at deltage i Konkurrencen.

Dette Skrift udgaar som Indbydelse til Universitetets Højtidelighed i Anledning af Hans Majestæt Kongens Fødselsdag. Festen, som er ansat til Onsdagen den 16de April Kl. 12 i Universitetets Festsal, aabnes og sluttes med den sædvanlige Kantate, udført af studerende; Universitetets Rektor, Professor A. Steen, holder Talen og uddeler Medaillerne til de prisbelønnede Afhandlingers Forfattere.

Videnskabens og Universitetets Venner indbydes til i Forening med Universitetets Lærere og Studenter at fejre denne Højtid.

Kjøbenhavn, den 2den April 1873.

Under Universitetets Segl.



1873.



